3. Освоение общих способов работы с уравнением за счёт порождения и преобразования базовой модели

Игра под обобщённым названием «Весы» является «изделием двойного назначения»: с одной стороны, она позволяет освоить общие способы решения уравнений и систем уравнений, с другой стороны, является методологической школой порождения и преобразования формального языка.

Идея игры возникла в ответ на сложности, с которыми сталкивается любой учитель математики. Решая уравнения или системы уравнений, школьники делают стандартные ошибки, и разбор этих ошибок не дает результата. Ошибки повторяются. Даже в старших классах ученики, решая уравнение $4x = 2$, делят большее число на меньшее – как проще. Это означает, что нет понимания идеальной сущности уравнения.

Чисто практическую подсказку для создания игры дала Ирина Николаевна Андреева, педагог вальфдорской школы. На основе этой подсказки мы провели игру в г. Мегионе с удивительным результатом. Наш игровой опыт по его письменному описанию был с успехом воспроизведен другими педагогами и педагогическими коллективами.

В целом результаты этой коллективной работы наводят на размышление: есть внутренняя связь между моделью весов и уравнением. Она есть и в языке, и в логике операций, и в самой истории возникновения алгебры. Так, арабы использовали операцию переноса некоторого элемента уравнения из одной части в другую с обратным знаком, назвав её «*аль-джебр*» (восстановление). Мы уничтожаем данный элемент в одной части и *восстанавливаем* его в другой части, но с противоположным знаком. С этой точки зрения весы не есть только наглядная модель. Модель весов позволяет обнажить сущностные особенности важнейшего математического объекта – уравнения.

Данная игра в решение уравнений на модели «весов» направлена на то, чтобы дать опыт движения и переходов в двух знаковых плоскостях – в плоскости «языка весов» и в плоскости алгебраического языка. Кроме того, дети получают важнейший опыт изобретения, порождения символического языка. Изобретения мыслительного инструмента, с помощью которого всегда можно разобраться с различными сложными моментами в решении алгебраических уравнений и ещё во многом другом.

Ниже мы даем описание трех игр, трёх вариаций на одну тему. Нам важно показать, как может варьироваться одна игра, как разнятся результаты в зависимости от ситуации конкретной школы, вовлеченности педагогов в инновационную деятельность, возраста детей и их начальной подготовки. Кроме того, сами описания игр имеют разные содержательные акценты.

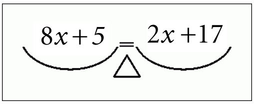
В первом тексте подробно даны порождение модели и коммуникативная форма работы с детьми, во втором тексте показаны общие способы работы с уравнением, развёрнуто представлены образцы работы учителя-игротехника с группой школьников (в разделе «рефлексия после игры»), в третьем сделан акцент на обучении педагогов в процессе игры.

(5, 6, 7 классы)

1. Порождение модели как изобретение языка[1]

Сегодня уже мало кого надо убеждать, что рисунок или схема весьма полезны при решении текстовых задач по математике. Рисунок позволяет лучше понять условие задачи, увидеть соотношение параметров, наконец, служит перекидным мостиком от текста к алгебраической записи. А вот когда дело доходит до алгебры, остаётся *просто решить уравнение.* И для кого-то это действительно просто, но есть дети, которым этот предмет даётся с большим трудом. Законы алгебры, способы преобразования выражений представляются для них набором необъяснимых правил, за которыми ученики не видят никакого смысла, а правила, тем не менее, надо запоминать и применять. А как научиться применять правила, как определять, какой именно закон использовать в данный момент, к чему стремиться, преобразовывая выражения, если алгебраические операции не связаны для тебя с реальностью какого бы то ни было действия?

Детские трудности рождали грустные переживания, но найти *средство* преодоления их нам не удавалось. Надо признаться, что идея графического моделирования алгебраических операций даже в голову не приходила, пока однажды...



Я увидела на полях школьной тетрадки одного знакомого семиклассника **весы** – рисунок, изображающий две чашки весов, на которых лежали... две части уравнения. Рисунок был послан родителям Саши учителем ярославской вальдорфской школы Ириной Николаевной Андреевой. Она просила родителей, чтобы они помогли сыну освоить тему «Решение системы уравнений», используя идею весов.

Этот маленький рисунок буквально потряс меня. Действительно, что такое уравнение, если не уравнивание величин, – не важно, постоянные они или переменные. Сразу становится понятно, что можно производить любые манипуляции с уравнением, лишь

[1] Фрагмент из книги «Опыты мыследеятельностной педагогики», М., 1998г.

бы они не нарушали равновесие символических чаш. Можно прибавлять одну и ту же величину к обеим частям уравнения, то есть докладывать грузы с одинаковым весом на обе чаши. Можно убрать с чашечек весов грузы с одним и тем же весом – вычесть равные величины из обеих частей уравнения. Тогда перенос члена уравнения в противоположную часть с обратным знаком соответствует снятию (или докладыванию) с обеих чашек весов одинакового грузика. Похоже, что алгебраическую операторику можно сделать понятной, прозрачной, подобрав каждой операции соответствующую манипуляцию с весами и грузиками.

Своим открытием я поспешила поделиться с коллегами и получила в ответ первое критическое замечание: «Идея интересная, но диапазон её действия слишком узок. На весах нельзя проинтерпретировать отрицательное число. А ведь именно действия с отрицательными числами вызывают наибольшие сложности у школьников». Минутное замешательство... и решение было найдено. Ниже вы увидите даже несколько версий реализации на весах операций с отрицательными величинами, но главный результат этого маленького коммуникативного столкновения был иным. Спор подсказал идею *игры, такой учебной ситуации, в которой дети, отталкиваясь от модели весов, сами бы открывали правила алгебраической операторики.*

Эта идея показалась заманчивой. Ведь сопоставление и уравнивание величин, приведение выражений к простейшему виду – это действия, лежащие в основе обширного класса школьных задач и упражнений. И если наша интуиция верна, дети получат мощнейшее средство разрешения многих затруднений в математике.

Есть и полигон, где можно провести испытания идеи «весов». Коллектив развивающего обучения школы № 4 сибирского городка Мегион всегда готов вместе с нами как в доброй русской сказке «пойти туда, не знаю куда, найти то, не знаю что». Мы вместе, постигая премудрости развивающего обучения и мыследеятельностной педагогики, доросли уже до седьмого класса и, как нам кажется, до серьёзных задач.

Мы решили работать с пятым, шестым и седьмым классами в форме трёхдневной учебной игры. Старшим ребятам эта форма образования хорошо знакома. Тема, которую мы собирались разыграть, была актуальна и для малышей пятиклассников – таким образом, для них возникала прекрасная возможность влиться в новый коллектив, коллектив «рошек» средней школы.

Замысел игры заключается в следующем:

- мы дадим игровым группам задания, требующие тех или иных действий по уравниванию величин. Это должны были быть текстовые задачи и просто примеры на решение уравнений, с требованием показать решение на модели. Предполагалось, что дети будут использовать те схемы, к которым они привыкли на уроках.
- мы введём модель уравнивания значений величин на весах как ещё одну возможную.
- наша задача заключалась в том, чтобы сначала «заманить» весь коллектив в ситуацию, с которой старые схемы не справляются, а «весы» служат средством её разрешения.
- на этом этапе мы бы смогли сопоставить операциональные возможности различных моделей.
- затем можно выйти на выявление правил алгебраических преобразований с помощью идеи «весов».

Мы объявили ребятам, что играть будем в изобретение моделей. Попросили их так выбирать модели для решения своих задач, чтобы **модель помогала объяснить любую деталь рассуждения в ходе решения.**

Школьники поделились на группы по 7–8 человек, больший состав не оптимален – не все включаются в обсуждение. Но при таком разделении получилось слишком большое количество групп – каждую не получалось заслушать на общем заседании. А не затронуть чей-то материал тоже нельзя, группа выпадет из общей работы. Поэтому мы решили предложить всем группам всего четыре различных задания. Таким образом, кому-то достались одинаковые задачи, и мы могли на выступлении всего четырёх групп построить коллективное обсуждение для всех участников игры.

Школьники получили две текстовые задачи, одно задание на моделирование явления и один пример на решение уравнения.

1. **Задача на уравнивание с весовыми параметрами.** *Сильная пчелиная семья насчитывает 80 тысяч пчёл и собирает за сезон 150 кг мёда. Сколько добывает каждая рабочая пчела, если учесть, что* $^1/_{16}$ *часть этого семейства занята другими делами?*

2. **Задача на уравнивание с невесовыми параметрами.** *Ира и Таня покупали в магазине карандаши и ручки. Ира купила 6 ручек и 4 карандаша. Таня купила 5 ручек и 5 карандашей, причём каждый карандаш стоил 1,5 тысячи рублей. У Иры денег на покупку не хватило, ей пришлось занять у Тани 3 тысячи рублей. Сколько у девочек было денег первоначально, если в результате они потратили одинаковую сумму?*
3. **Задача на построение модели.** *Объяснить эффект качания свечки, зажжённой с двух концов. Свеча удерживается в середине двумя спицами.*
4. **Задача на моделирование хода решения уравнения.** *Решить уравнение 3х + 2 = 2х + 4 и показать ход решения на модели.*

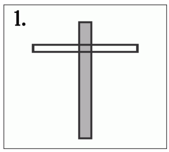
Получив свои задания, дети разошлись по группам, а через два часа все были готовы выступить на общем заседании с докладами о своих результатах.

Первыми выступали группы, **моделирующие «поведение» свечи**. Нам нужна была эта тема первой, чтобы в игре появились весы и механизм их работы.

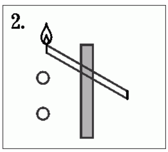
Работа внутри групп строилась таким образом. Педагоги показали ребятам закреплённую на штативе свечу и спросили, что будет происходить если её зажечь с двух концов. Дети выдвинули гипотезу, что свеча будет крутиться, но обосновать своё предположение не могли. После этого юные исследователи приступили к проверке своей гипотезы и увидели, что свеча качается, а не вращается. Задача заключалась в том, чтобы объяснить механизм этого явления.

Логика доклада была безупречна:

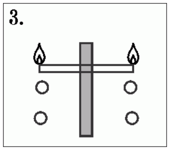
– Чтобы понять, почему свеча качается, мы решили провести несколько опытов.



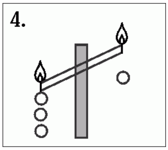
1. Мы видим, что незажжённая свеча, закреплённая точно посередине, располагается строго горизонтально.



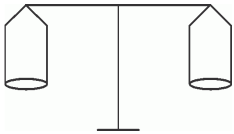
2. Мы зажгли свечу только с одной стороны. Этот конец свечи поднялся в верх после того как стал капать воск. Как только горящий кончик потерял некоторое количество воска, он стал легче негорящего. Поэтому негорящий перевесил.



3. Затем мы потушили свечу, привели её в состояние равновесия и зажгли оба конца одновременно. Воск стал капать, но свеча осталась неподвижной. Свеча осталась в равновесии, потому что она теряла с обоих концов одновременно одно и то же количество воска.



4. Мы опять потушили свечу и зажгли её противоположные части последовательно одну, потом другую. Часть свечи, зажжённая первой, поднялась вверх, и свеча стала качаться. Мы заметили, что та половинка свечи, который оказывается внизу, всегда теряет больше воска, чем верхняя. Это происходит потому, что пламя нижней части лижет край свечи и растапливает больше воска, чем пламя верхней. Кроме того (добавила вторая группа), на нижней половине образуется желобок, по которому стекает воск, и когда она оказывается сверху этот желобок какое-то время задерживает воск, который сохраняет вес верхней части свечи.



Получается, что свечка качается из-за того, что всё время меняется соотношение веса на левом и правом конце свечи, как на весах.

– Это так же, как на детских качелях, – прозвучал вопрос из зала, – когда на одном конце сидит тяжёлый человек, а на другом лёгкий?

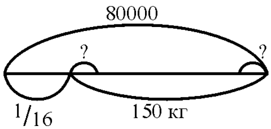
Внешне действительно очень похоже, интересно как будут отвечать наши исследователи.

– Нет, на качелях всё не так. Тяжёлый человек не может избавиться от своего веса, чтобы стать легче лёгкого и взлететь вверх. Ему приходится оттолкнуться от земли, только тогда он оказывается наверху.

Вот так это можно изобразить:

Этот пример с качелями появился очень кстати; он нам ещё пригодится, но время его впереди.

А пока – выступление следующей группы **с задачей про пчёл.** Доклад был лаконичным и стремительным:



– Мы сначала нашли часть, которая не работает.

1) 80000 : 16 = 5000.

2) 80000 – 5000 = 75000.

– Потом нашли, сколько собрала каждая.

3) 150 : 75000 = 0,002.

По каменным лицам в зале было видно, что решение многими не понято. Надо сказать, докладчики не слишком и старались быть понятыми. Ни на схеме, ни в вычислениях не указано, где пчёлы, где мёд, какие части какому целому принадлежат. На одном отрезке в схеме располагаются все данные задачи, что также не способствует пониманию. Но может быть, мы не правы в своих опасениях, и всем всё ясно? Мы решили проверить.

– *Кто может объяснить, почему ребята 150 поделили на 75000, что они тем самым сделали?* – обратились мы к залу.

Человек десять подняли руки сразу, подпрыгивая от нетерпения. Остальные же отводили глаза в сторону или делали вид, что обдумывают какие-то более важные вопросы. Именно эти дети нас и интересовали.

– *Что за число 75000 в задаче?*

– Это мы нашли количество рабочих пчёл, тех, что мёд добывают. А 5000 – нерабочие пчёлы.

– *150 − это что за число?*

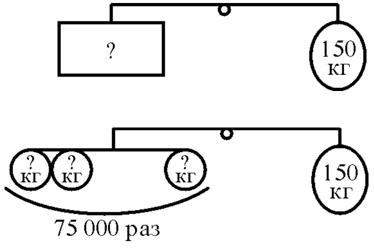
– Столько всего килограммов мёда пчёлы собрали.

– *Что чему приравнивается?*

– Пчёлы мёду.

Странный ответ. Хотя, если не раздумывать, то схема отрезков наталкивает на такое высказывание.

– *Как могут быть пчёлы приравнены мёду? По весу, что ли? Да и зачем их приравнивать? Давайте попробуем изобразить нашу ситуацию на весах.*



– 150 кг мёда – столько мёда всего было, это столько собрали 75000 пчёл. То есть, если то количество мёда, которое каждая пчела принесла, взять 75000 раз, то и получится 150 кг.

– А как теперь эту схему записать в виде алгебраического уравнения?

– Можно с иксом записать: $ax = b$.

С нашими данными получится:

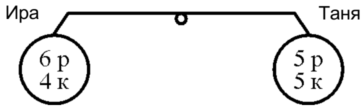
$$x \cdot 75000 = 150,$$
$$x = 0{,}002 \text{ кг.}$$

Следующими выступали ребята, решавшие задачу «**про карандаши и ручки**».

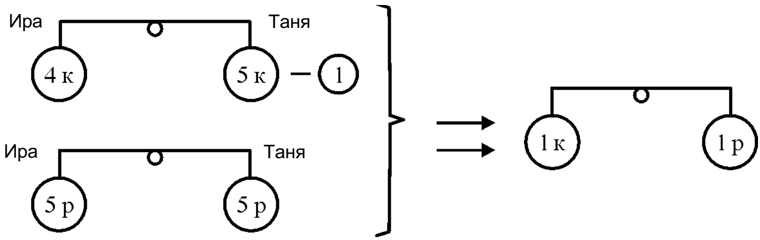
Идею уравнивать величины на весах им подсказал руководитель группы.

Докладывал Антон. Он сказал, что в этой задаче можно было использовать схему «отрезков», но на ней нельзя показать ход решения. А на схеме «весов» можно. И показал, как.

– Величины, уравненные по условию задачи, можно изобразить так:



На этой схеме уравниваются стоимости покупок Тани и Иры. А теперь изобразим само решение задачи:

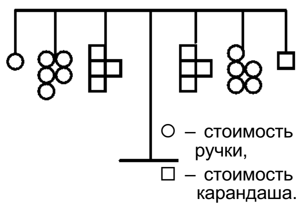


Докладчик остановился, чтобы желающие могли задать вопросы.

Миша выразил недоумение, которое возникло не только у него:

– Зачем нужно взвешивать очевидно равные части?

– Только затем, чтобы можно было эти равные части убрать с весов и посмотреть, что останется на уравновешенных весах. Можно так это изобразить *(рисунок справа)*.



В виде уравнения это можно записать так: $6x + 4 \cdot 1{,}5 = 5x + 5 \cdot 1{,}5$, где x – цена ручки.

Вопросов больше не было, и место у доски заняла последняя группа. Она должна была **моделировать решение уравнения.**

Ребята объяснили нам, в чём для них была сложность выполнения задания. Оказывается, совсем не в том, чтобы решить уравнение, – это было несложно. А вот подобрать схему, с помощью которой можно моделировать преобразования уравнения, было не так просто. Все привычные схемы были пригодны для фиксации условий задачи, по ним можно было составить исходное уравнение. Решалось уравнение всегда чисто алгебраически. К идее весов группа вышла в поисках жизненных ситуаций, в которых требуется что-то уравнивать.

Изобразим неизвестное x – ○, а единицу – □. Получились такие параллельные ряды:

1)  $3x + 2 = 2x + 4$

2)  $3x + 2 - 2 = 2x + 4 - 2$
$3x = 2x + 2$

3)  $3x - 2x = 2x - 2x + 2$
$x = 2$

Выводы:

- Преобразования уравнения нужны для его упрощения, но так, чтобы сохранялось равенство в уравнении или равновесие на весах.
- Перенос одного члена уравнения в другую часть с обратным знаком соответствует снятию с обеих чашек весов грузиков с одинаковым весом.

На этом первый день работы закончился. Игроки получили домашнее задание: мы их попросили подумать, как на весах изобразить уравнение $2x + 1 = -3$.

Следующий день начался с общей **самостоятельной работы.** Дело в том, что коллективная работа на общем плацдарме часто создаёт у всех её участников – и у взрослых, и у детей – впечатление, что всем всё понятно. Однако впечатление это обманчиво. Поэтому так важно выяснить, что каждый реально освоил, а что осталось непонятым. Разобраться в этом полезно и учителям, и ученикам. Для этого и была предложена самостоятельная работа.

Школьники решали две задачи, уже разобранные на общем заседании, но другой группой. Плюс одну задачу новую. А несколько семиклассников решали ещё и *систему уравнений*. Мы с большим трудом уговорили учителя математики дать для самостоятельной работы систему уравнений, поскольку на уроках семиклассники этого ещё не проходили. Учителю, даже учителю развивающего обучения, очень сложно представить, что дети могут самостоятельно справиться с незнакомым заданием. Мы же, напротив, были уверены, что тот, кто понял возможности и силу «весов», сможет применить их в новой ситуации.

Новые задания для самостоятельной работы:

1. **Задача.** *На базу привезли 79 т фруктов. Груш привезли на 1 т больше, чем яблок, яблок в три раза меньше чем бананов. А бананов в 2 раза больше, чем апельсинов. Сколько апельсинов привезли на базу?*

2. *Решить систему уравнений:* $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

Результаты самостоятельной работы вызвали у нас противоречивые чувства. Выяснилось, что большая часть детей не может воспроизвести решений, выработанных коллективно. Это значит, что мы проскочили моменты непонимания, и двигаться нужно гораздо медленнее. Но с другой стороны, почти все ребята, получившие систему уравнений, с ней справились, прибегнув к моделированию решения на весах! Отличный показатель того, что «весы» выступили в качестве средства для разрешения затруднения в новой ситуации. Средство, но не для всех.

Такое положение дел требовало определённых действий от руководителей игры. Необходимо было придумать, как включить в работу тех, кто остался «за бортом». Мы решили выявлять и неспешно прорабатывать фрагменты коллективного обсуждения, которые не всем понятны, но при этом работа не должна была потерять динамизма и содержательного накала, чтобы из игры «не выпали» теперь уже самые сообразительные. В обычной школьной практике эти два требования взаимно исключают друг друга. Учителю приходится жертвовать одним ради другого. Мы не могли этого себе позволить.

Итак, прорабатываем новый уровень сложности содержания – отрицательные величины (поэтому включены сильные), но движемся медленно, обсуждаем и проясняем с новой силой (поэтому могут участвовать слабые) старый *принцип*, общий для всех уровней сложности содержания, а именно: *принцип действия весов – приведение весов в равновесие и вывод весов из равновесия.* Так, чтобы с отставшими детками можно было бы увидеть этот принцип и на старых простых примерах.

Школьникам предстояла полуторачасовая работа по группам. Мы собрали всех вместе, чтобы объявить задание.

> Нам важно было в рамках этой игры отработать «весы» как модель, позволяющую улавливать деятельностный смысл алгебраических операций. Но именно как модель, а не просто как ещё один новый рисунок, который заместит собой старые. Способность создавать и использовать модель как средство своей учебной деятельности мы стремились формировать и до этой игры. Но данная игра позволила обнаружить нерадостный феномен. Все дети в решении задач применяют схемы – это замечательно. Школа развивающего обучения усердно культивирует схематизацию. Но при этом, выяснилось, что **использование схем часто носит догматический характер**. Это означает, что рисунки (причём всегда одни и те же) используются только как форма записи условия задачи, другая форма по сравнению с алгебраической. Схематизация превращается в обязательный ритуал в работе с задачей. Если ученик знает, как решать задачу, то схема ему не мешает. Если же задача не решается, схема не помогает ему выйти из затруднительного положения. А ведь именно для того, чтобы выйти из тупика, и нужна способность моделирования. *С помощью модели можно «поймать» конструкцию задачи.* Но это возможно только в том случае, если человек различает привычное схематическое изображение и собственно модель. Это различие отнюдь не внешнее, одну и ту же знаковую форму кто-то будет использовать как модель, а кто-то просто как иллюстрацию некоторого смысла. **Модель** должна быть представлена тремя своими сторонами одновременно.
>
> Три стороны модели это –
>
> - видимое изображение (схематический рисунок, знаковая форма модели);
> - идея, стоящая за рисунком (в математике «идея» часто сводится к явной фиксации соотношения параметров и величин, скрытого в формулировке условий задачи);
> - возможности оперирования на этом рисунке (схеме) в рамках идеи.
>
> Поэтому модель, конечно, обладает наглядностью, но её особая наглядность отличается от наглядности натуралистического рисунка. Можно сказать, что это наглядность идеальных отношений.

Учитывая все вышеизложенные обстоятельства, мы предложили разбить время групповой работы на две части.

Начать групповое обсуждение мы рекомендовали с рефлексии, или осмысления опыта продвижения группы в первый день игры и анализа результатов самостоятельной работы. В помощь мы предложили вопросы:

1. Какие рисунки и схемы вы использовали в своей работе?
2. Как именно вы их использовали?
3. Какие идеи стоят за этими рисунками?
4. К каким ситуациям применимы ваши схемы?
5. Какие действия осуществимы на каждой из схем?

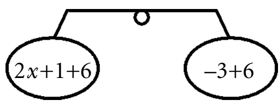
Вторая часть групповой работы предполагала возвращение к локальному игровому действию, а именно к домашнему заданию: изобразить на весах отрицательное число так, чтобы возникла возможность оперировать с отрицательными числами в уравнении.

В докладах мы просили представлять вторую часть, а результаты, полученные в рефлексивной первой части, демонстрировать в действии, не описывая их.

Во время перерыва мы выяснили, что многие, выполняя домашнее задание, искали свои варианты изображения отрицательного числа и хотят выступить со своими версиями, опасаясь, что в докладах от групп их идеи не прозвучат должным образом. Мы решили всем желающим дать такую возможность.

Напомним уравнение: $2x + 1 = –3$**.**

Версия **Маши:**



Зал мгновенно отреагировал:

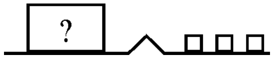
– Ты не показала на весах отрицательное число. Ты решаешь как всегда, только зачем-то на фоне картинки».

Для Маши и тех, кто также не понял задачу, мы решили напомнить, как работает модель весов для положительных чисел.

– *Как на весах можно моделировать отношение положительных величин?*

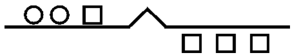
– Положительное число можно изобразить грузом, который давит на чашку. Можно, например, одной гирькой изобразить единичку, тогда число 3 будут представлять три гирьки.

– *Как на весах изобразить равенство?*



– Уравновешенными весами. Например, $x = 3$ можно изобразить весами, на одной чашке которых лежит коробка – неизвестное, а на другой – три гирьки. И весы уравновешены.

Маша согласилась, что сделала не то, что требовалось, и мы перешли к следующей версии.

Версия **Тимура**: 

– Отрицательные числа надо размещать *под* чашей, – пояснил Тимур свой рисунок. И тут же получил возражение:

– Почему весы уравновешены, если одна чаша пустая?

Судя по физиономии, Тимур вопроса не понял. И он был в этом не одинок. Оказывается, подобная версия была у многих ребят. Значит, в этой точке необходимо остановиться и разобраться.

– *А как весы будут себя вести, если на одной чаше есть груз, а на другой нет?*

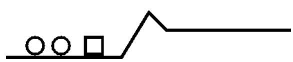
Вопрос вызвал замешательство. Оно свидетельствовало о том, что для детей картинка весов и реальный прибор не связаны.

Многие ученики с рисунком-**моделью** обходятся просто как с рисунком, вернее как с условным обозначением, с которым можно работать произвольно, **не вырабатывая логики оперирования (действий) с моделью.**

Версия Тимура сделана на том же допущении. Он предложил рисунок, где различены положительные и отрицательные величины: «на чаше» и «под чашей». **Такие значки позволяют изобразить исходное уравнение, но не позволяют моделировать преобразование уравнения.**

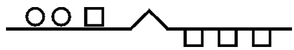
Действительно, сколько бы мы не положили под чашку гирек, на положении чаши это никак не отразится. Нам же важно было добиться того, чтобы значки, предлагаемые детьми, имели натуральный смысл. Поэтому мы ждали, пока кто-нибудь нарисует весы с одной пустой чашей.

Рисунок предложила **Женя:**



– Весы будут перекошены, если одна чаша пустая, а другая с грузом.

– *Правильно, а нам надо показать весы в состоянии равновесия и так, чтобы груз одной чаши символизировал отрицательное число. Как это можно сделать?*



К доске вышел **Слава:**

– Я знаю, как показать отрицательное число на весах. Отрицательное число надо изображать магнитиками, прикреплёнными к дну чашки.

Мы задаём всё тот же вопрос:

– *Как при этом будут вести себя весы?*

Ребята уже поняли, что требуется от рисунка, и сами формулируют критические замечания:

– Магнитики будут действовать так же как гирьки, они же будут вниз тянуть чашку.

– Гирьки давят на чашку книзу и магнитики тянут книзу, неважно, что магнитики с другой стороны прикреплены.

– На такой картинке получится 3 = –3, ведь гирьки действуют также как магнитики.

Критика очень точная, осталось только критику перевести в позитивную мысль:

– *Вы всё правильно подмечаете: положительное число изображается грузом, который* ***действует*** *на чашку, заставляя её опускаться вниз. А как же тогда должен действовать «груз наоборот», выражающий своим действием отрицательное число? Как осуществить действие противоположное давлению груза на чашу?*

Драматическая пауза повисла в зале. Глаза горели, предчувствие рождающейся идеи было совершенно явственным. Тишину нарушил возглас **Вани:**

– Действие вверх должно быть направлено. На чашу надо вверх давить, против груза!

– *А как это можно* ***сделать****?*

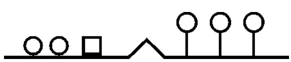
Тут уже предложения посыпались как из рога изобилия.

Ира: Шарики воздушные можно к чаше привязать.

Антон: Можно под чашу сжатые пружинки установить.

Миша: Можно к чаше и к столу разнополюсные магниты прикрепить, чтобы они отталкивались.

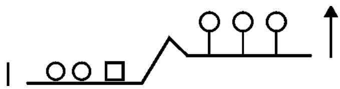
Все предложения встречались возгласами одобрения, но нам надо было на чём-то остановиться, причём важна была наглядность и простота изображения. Поэтому в качестве символа **отрицательного числа** мы решили попробовать воздушный **шарик, устремлённый вверх**. Картинка нашего уравнения стала выглядеть так:



Вроде бы всё правильно, но к нашему удивлению, картинка вызвала неудовольствие у некоторых ребят.

С критикой выступила **Ира.**

– Так не получится. Весы не будут уравновешены. Ведь шарики тянут вверх, а грузики вниз. Будет так:



– Почему же левая чашечка вниз идёт? – к Ире обратилась **Женя**.

К нашему удовольствию, аудитория перестала пассивно принимать всё, что появляется на доске, и активно выражала своё непонимание. Это была маленькая победа.

Ира стала уверенно отвечать на вопрос:

– Квадратик обозначает грузик, единичку, он давит вниз.

Ира выжидательно посмотрела на Женю, задавшую вопрос:

– Теперь понятно?

Но Жене не стало понятно:

– А кружочки, по-твоему, это какие величины – положительные или отрицательные?

Ира ещё не поняла, к чему клонит подруга, и уверенно ответила:

– Кружочки – это же неизвестные, иксы. Мы ещё не знаем, какие они – положительные или отрицательные.

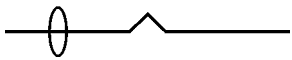
Женя удовлетворённо выдохнула:

– Вот именно, не знаем. Поэтому и говорить не можем, что вся левая чашечка перетягивает правую.

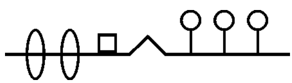
– Действительно... – Ира озадаченно нахмурилась, – тогда не надо их шариками на чашечке показывать, раз неизвестно какие они.

Это было справедливое замечание, и мы объявили конкурс на лучший значок, изображающий неизвестную величину в уравнении.

Победу одержал овал, разделённый линией чаши пополам:



С новым обозначением неизвестной величины уравнение на модели весов получило такой вид:



$2x + 1 = -3$

– *Всем понятно?*

– Понятно.

– *В таком случае, решайте уравнение в своих тетрадках самостоятельно. Разделите листок на две половинки вертикальной чертой. Слева помещайте рисунок весов, а справа соответствующее ему алгебраическое выражение. Операции производите на модели весов, в алгебраической форме фиксируйте только результат своих действий.*

Ребята принялись за работу. Но получалось совсем не так гладко, как хотелось. То и дело возникали вопросы и недоумения. Причём малыши-пятиклассники увязали там, где для старших всё было ясно. Мы поняли, что требуется детальный разбор фрагментов, для каждого возраста своих, представляющих сложность для данного уровня подготовки. Рабочее время подходило к концу, и мы предложили детям закончить работу дома. На следующий день в группах совместно прорешать примеры, вызвавшие затруднения. А на общее обсуждение вынести только те моменты в решении, в которых обнаружилось общее замешательство, и рассказать, как оно было преодолено.

Третий день игры начался с работы в группах. Если судить по лицам детей, собравшихся на общее заседание, в каждой группе произошло что-то важное.

Да и организаторы игры и учителя были в приподнятом настроении. Коллектив впервые выходил на собственные оригинальные результаты, имеющие практическое значение. Мы посчитали необходимым дать почувствовать детям уникальность разработки, на которую мы все вместе вышли.

– *Коллеги, вы знаете что такое язык и зачем он нужен?*

– Язык – это множество слов или знаков, он нужен, чтобы передавать смысл, нужен для понимания.

– *Какие языки вам известны?*

– Русский, английский и другие.

– *А ещё?*

– Язык жестов, дорожные знаки, алгебраический, геометрический.

– *А вы можете привести пример ситуации, где бы работал язык геометрических фигур? Можно ли здесь говорить о языке?*

Наступило замешательство, тот, кто не принялся сосредоточенно обгрызать кончик карандаша, поднял глаза к потолку, но там ответа на вопрос не было. Пауза затягивалась... И всё же пример был найден, причём ребята использовали собственный опыт.

– На уроках труда. Мы рисуем чертежи заготовок с помощью геометрии. Без чертежей мы бы не смогли выточить правильно ни одну деталь.

– Верно. Уже на этих примерах видно, как трудно бывает освоить какой-то язык. Трудно освоить, а можете ли вы оценить то, насколько сложно придумать новый язык. Впрочем, сложность этой задачи зависит от того, с какой целью создаётся язык. Есть языки, которые служат для общения нескольких человек, а от всех прочих эти языки смысл прячут. Вы поняли, о чём идёт речь?

– О шифрах, кодах.

– Да, яркий пример такой тайнописи есть у Конан Дойля – язык «пляшущих человечков». Придумать такой язык не составляет большого труда. Вы можете поупражняться в этом в тайной переписке друг с другом.

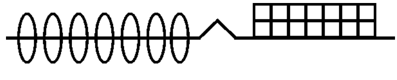
А вот придумать, изобрести язык, который бы служил не сокрытию, а обнаружению смысла, установлению понимания – задача не только сложная, но и достойная всяческого уважения. Вчера мы с вами вместе вышли на решение такой именно задачи. Мы стали изобретать язык, позволяющий видеть, понимать и осваивать алгебру. Это язык уравнивания весов. Если мы доведём эту работу до конца, то сможем помочь всем, кто испытывает сложности в задачах и примерах, связанных с уравниванием величин.

Мы уже имеем символы для обозначения положительной, отрицательной и неизвестной величины и правила оперирования с этими символами. Язык этот только рождается. Почти каждая новая ситуация требует его доработки и уточнения. Сегодня мы и будем стараться выявлять те ситуации, где обнаруживаются границы нашей разработки, где введённые символы не работают и нужно наращивать мощность нашего нового языка.

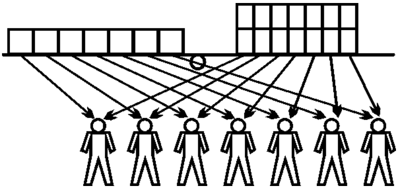
Первыми имеют слово пятиклассники.

Докладывала **Оля:**

– Мы не будем вам показывать всё решение. Разберём только то место, где нам было непонятно, но мы разобрались. Мы получили такое уравнение: $7x = 14$. На весах это выглядит так:



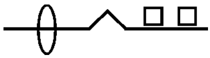
Мы не понимали, как нам взвесить одно неизвестное.



Мы сделали так: представили, что в примере уравнены пироги. Два пирога слева и справа. Только левый поделён на 7 частей, а правый на 14. Первый пирог яблочный, а второй капустный.

Потом мы стали делить на семь человек оба пирога.

Получилось, что каждому досталось по одному куску яблочного пирога и по два кусочка капустного. Значит, одно неизвестное равно двум:



Получили $x = 2$.

– Ребята справились со своим затруднением, получили ответ. А какое общее заключение можно сделать из представленного рассуждения?

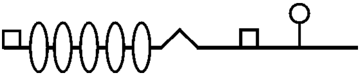
– Пятиклассники доказали, что ***обе части уравнения можно поделить на одно и то же число, равенство при этом сохранится.*** Эта алгебраическая операция соответствует разделению грузов на обеих чашах весов на одно и то же количество частей. Если весы были уравновешены, то одна часть груза на левой чаше будет уравновешена одной частью груза правой чаши.

– Действительно, мы получили ещё одно правило преобразования уравнения.

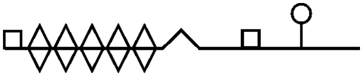
Для малышей на этом игра закончилась, они достаточно потрудились, им было сложнее других. Пятиклассники отправились отдыхать, а мы продолжили обсуждение докладов групп.

Слово получил **Миша**. Он представлял группу, которая моделировала решение уравнения $-5x + 1 = 0$.

– Сначала разберёмся с нулём. Нуль – это либо пустая чаша, либо можно сказать так: нуль можно показать чашей, на которой уравновешены шарик и грузик.

 $5x + 1 = 0$

Мы показали $5x$, а надо $-5x$. Обозначим $-x$ ромбиком: 
Тогда уравнение на весах будет выглядеть так:

 $-5x + 1 = 0$

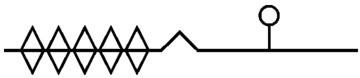
Слушатели не дали Мише возможности продолжить доклад. Возникло непонимание. Ребята хотели разобраться:

– Зачем вам потребовалось ввести ромбик, это понятно: чтобы на картинке отличить $5x$ от $-5x$. Но непонятно, как ромбик действует. Если ромбик положить на весы, что он делает с весами?

– Ромбик действует в направлении, противоположном тому, в котором действует овал. Овал символизирует неизвестное в уравнении. Мы не знаем, является x величиной положительной или отрицательной. Мы не знаем, следовательно, что скрывается за овалом: шарики или грузики, его действие устремлено вверх или вниз. Так и про ромб мы не можем заранее сказать, в каком направлении он действует. Важно только одно, что сила ромба по определению обращена против действия овала. Можно сказать, что ромб «обессиливает» овал.

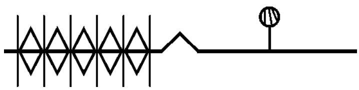
С новым значком мы разобрались, и Миша получил возможность продолжить свой доклад:

– Уберём с обеих чашек весов по одному грузику.

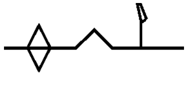


$$-5x = -1.$$

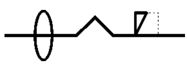
Теперь поделим грузики на обеих чашах на пять частей.



$$\frac{-5x}{5} = \frac{-1}{5}.$$



$$-x = -\frac{1}{5}$$



$$x = \frac{1}{5}.$$ Всё!

На этом примере мы поняли, как можно работать с отрицательным коэффициентом при неизвестной величине и нулём. Но даже не это главное. У нас возник исследовательский азарт, возникло ощущение собственной силы, появилось желание и дальше с помощью весов открывать законы алгебраической операторики. Рождающийся язык помогал нам прокладывать захватывающе интересную дорогу в мир алгебры, позволял видеть и анализировать каждый свой шаг.

Учебная ситуация закончилась, теперь это событие принадлежит истории, конечно, «малой» истории тех, кто в нём участвовал. Но игровое последействие продолжается и даже набирает силу. Ребята из Мегиона пишут свой учебник по алгебре, в котором показывают, как пользоваться моделью весов в работе с уравнениями. Педагогический коллектив небольшой новосибирской школы воспроизвёл нашу игру в «весы» и вышел на новые результаты, в том числе на возможность их применения в химии. В Ярославле учителя математики используют идею весов, чтобы помочь отстающим ученикам.

Идея оказалась настолько мощной и в тоже время такой простой, что практически в каждой новой ситуации обсуждение результатов нашей игры даёт новые результаты.

г. Мегион, 1996 г.

2. Построение понятия уравнения и общих способов решения уравнений.

(5, 6, 9 классы)

ОПИСАНИЕ ИГРЫ

Особенностью работы с младшими классами среднего звена в ЦО «Измайлово» было отсутствие у школьников той подготовки, которую даёт в начальной школе на уроках математики система развивающего обучения Д. Б. Эльконина-В. В. Давыдова. Ребята учились по традиционной программе, и их способы движения в материале игры и самочувствие существенно отличались от того, как «обрабатывали», пропускали через себя аналогичный материал их сверстники «рошники». Юным «измайловцам» было непросто в игре. Нелегко было перескакивать из языка алгебры в язык «весов» и обратно, нелегко было видеть отличия языков и способов оперирования в одном и другом. Неясно было, почему нужно добиваться единообразия в обозначениях различных элементов модели весов. Сами приёмы моделирования давались с трудом. То, что в системе РО малыши получают в процессе обучения в предмете «математика», этим детишкам пришлось осваивать прямо в игре. Поэтому они не могли испытать той радости и лёгкости интеллектуальных прозрений, которые были дарованы школьникам системы РО всем их предыдущим опытом учебной деятельности. Игра потребовала от москвичей серьёзного напряжения, и переживалась, видимо, скорее как работа, нежели как интеллектуальная игра-забава. Соответственно и результаты были более скромными, чем обычно бывает в этой учебной ситуации.

Ребята довольно быстро осваивали собственно решение уравнений на весах, основную сложность составляла задача удерживать общее смысловое поле и переходы в нём. Эта сложность и потребовала от организаторов игры введения такого средства как *таблица.* С помощью таблицы стало возможно структурировать нарабатываемое содержание. Содержание при этом становится обозримым и техничным (орудийным, инструментальным). Школьники приняли таблицу как средство, и заключительные доклады группы выстроили в этой именно форме.

П е р в ы й д е н ь

К вопросу о сценировании учебной ситуации

Каким должен быть установочный доклад на игру в моделирование с учениками пятого-шестого класса? Установочный доклад – это первое слово руководителя игры. Утро. Дети ещё не собраны, никак не мотивированы на работу. Объяснять замысел игры? Но эта игра не будет опираться на имеющийся у них опыт, нужно будет шагнуть в неведомое. Поможет ли им рассказ про модели и моделирование, про то, что можно увидеть в обыкновенных весах, как идею весов можно использовать для исследования уравнения? Такой рассказ не включит маленьких школьников в работу, а когда в группе они наконец-то получат обыкновенные математические задачки, то и отнесутся к ним привычным образом, просто решат. И собственно игру придётся начинать на общем заседании.

Малышей надо бы сразу поместить в ситуацию, заставить напряжённо размышлять, увидеть бездонную загадку в, казалось бы, простых и хорошо знакомых вещах. Дать опыт переживания острой нужды в Мышлении.

Когда можно ощутить, понять, что мышление есть? Когда ясно переживаешь недостаток оного, понимаешь, что именно мышления не хватает для того, чтобы справиться с ситуацией.

Итак, ***ситуация.***

(Ниже представлена скорее норма развёртывания содержания в ситуации, чем описание того, как всё было разыграно «на самом деле»).

– *Кто может на доске изобразить прямую линию?*

Лена рисует белым мелом линию от края доски до края. Коля рисует розовым мелом фрагмент поменьше.

– *Внимание, вопрос: это разные две линии, или одна? Что мы видим, две прямые или одну?*

Мнения разделились. Часть зала уверяет, что перед нами две разные линии. Другая часть нерешительно пытается аргументировать противоположную точку зрения.

– *Что нам позволяет в этих следах оставленных мелом, не очень-то ровно, «от руки» проведённых видеть, узнавать, угадывать **прямую линию**?*

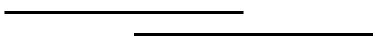
– Мы ***знаем,*** что это прямая.

– Есть ***идея*** *прямой линии, которая существует* ***в мышлении****. И есть множество разных её воплощений в реальности. И всё же, невозможно ответить на вопрос, видим ли мы одну линию или две разных, пока мы не обсудили эту самую идею. Какова идея прямой линии?*

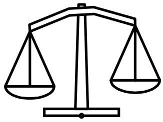
Версия младших школьников: прямая линия – это линия, продолжающаяся в обе стороны до бесконечности. Бесконечность прямой линии – важная характеристика, но её явно не достаточно.

Мы можем нарисовать кривую. И она будет удовлетворять определению, но явно не будет изображать прямую линию. А вот если идею прямой задать в виде такого определения: *прямая – это бесконечная линия, состоящая из точек, причём две любые из них соединены этой линией по кратчайшему расстоянию.* В этом случае можно сказать, что мы на доске видим два изображения одной и той же сущности.

Другое определение (его дали старшеклассники из группы экспертов по моделированию) звучит так: прямая – это линия, не имеющая конца, проходящая через две точки и соединяющая их по кратчайшему расстоянию. Согласно этому определению, мы видим на доске изображения двух прямых, так как они вообще не имеют общих точек.



Получается, **Идея** – это не просто воображаемый образ (и соответствующий знак), это обязательно ещё и определённое **понятие**. И нам предстоит научиться работать с идеями, видеть, полагать их в мышлении. Но также и обнаруживать воплощения идей в самых разных объектах реальности.



$$2x + 3 = 7$$

– Скажите, что общего между этими аптекарскими весами и алгебраическим уравнением?

Кто-то усмотрел общее, кто-то нет. В данный момент это уже было несущественно: на этот вопрос у нас есть три дня игры.

Группы получили задачи с заданием: попытаться увидеть за своими задачами весы, и использовать их в решении. Требование к докладу: *так рассказать и показать решение задачи, чтобы его понял и смог воспроизвести своими словами любой пятиклассник*.

На этой игре мы впервые отработали методический приём: на доклад группы приглашаем к доске конкретного пятиклассника (или двух), просим докладчиков рассказывать именно ему. Если после доклада и обсуждения (ответов на вопросы пятиклассника) означенный пятиклассник сможет воспроизвести решение сам и своими словами, значит доклад качественный. В противном случае делаем заключение, что доклад не получился, самим докладчикам, очевидно, не все ясно. Этот приём не только помог нам, но и очень понравился детям.

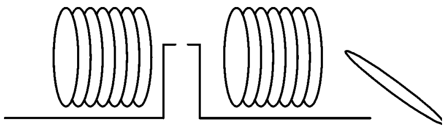
Старшеклассники должны были выступить в этой игре в необычной для себя функции, в функции «экспертов по моделированию». Конечно, эта «должность» авансирована ребятам. Они пока не многим больше малышей понимают про моделирование и экспертировать чужую деятельность не в состоянии. Но могут двигаться в материале игры гораздо быстрее, чем пяти-шестиклассники, а значит, могут помогать. А вот как помогать – это есть главный вопрос и главная задача группы.

Мы просили помогать в форме вопросов группам младших. Эта просьба, как выяснилось, потребовала серьёзного напряжения. Оказывается, задать вопрос непросто. Ведь для этого надо обнаружить в тексте доклада что-то непонятное, а привычки искать непонятное нет. Наоборот, есть привычка отсортировать, услышать только понятное, скорее даже знакомое, а непонятное автоматически отсеять. Поэтому здесь требовалось разрушить укоренившиеся автоматизмы сознания, и заставить себя работать по-другому. Весьма полезная задача для тех, кто хочет осваивать мышление и стать опорой в этом деле своим младшим друзьям.

Первая группа докладывала о своих опытах со свечой. В свечу посередине с двух сторон воткнуты две иголки. Иголки положены на опоры, и незажженная свеча находится в равновесии, она неподвижна. Вопрос был в том, что будет происходить со свечой, если её поочередно зажечь с обеих концов. Ребята проделали опыт, увидели, что свеча начала качаться. Однако, внятного ответа на вопрос, почему свеча раскачивается, ребята не дали.

Приготовили красочный рисунок (даже картину), но не схему. Соответственно, весов в поведении свечи ребята не усмотрели. Пришлось решать задачу всем коллективом игры. Требование зарисовать на схеме самое существенное, свою мысль, как всегда дало результат. В педагогическом плане точный вопрос или точное задание гораздо эффективнее прямых подсказок.

Интересная схема была изобретена девочкой Владой, ученицей пятого класса. Она представила свечу как столбик монеток. Тогда каждая отрывающаяся капелька – это как одна монетка, которая отнимается от столбика монеток. Естественно, что столбик становится меньше и легче. И если на весах исходно два равных столбика монеток, то тот столбик, что теряет монетку, становится легче и весы выходят из равновесия.



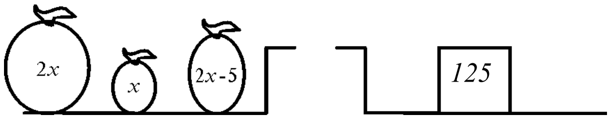
После обсуждения схемы Влады группа докладчиков смогла наконец увидеть идею весов.

Рефлексивные сокрушения

Конечно, ситуация была отработана, нужный результат получен, опыт со свечкой свою роль в игре сыграл. Но... этот эпизод с капелькой-монеткой надо было разыграть много-много сильнее и ярче, так, чтобы «зритель плакал»! Зачем?

Ребёнок, маленькая девочка Влада породила красивейшую идеализацию! Это маленькое чудо. И необходимо, непременно необходимо, чтобы все присутствующие осознали, поняли, что у них на глазах произошло удивительное и прекрасное – рождение мысли! Надо было «остановить мгновение», надо было так это пережить мне самой, чтобы все разделили это чувство восхищения и радости от случившегося. А у нас это прошло как само собой разумеющееся. Жаль, очень жаль. Чтобы научить детей мышлению, надо научить их переживать, воспринимать красоту мысли. Чтобы воспитать человека, надо научить его радоваться удаче ближнего как своей собственной. А как научить, воспитать? Для начала превратить в соучастников своего переживания. Втянуть их в свою радость и своё восхищение от случившегося акта мышления. Втянуть раз, другой, десять раз. После этого они научаться видеть прекрасное сами.

Вторая группа пятиклассников решала задачу про мешки с сахаром: *В первом мешке в 2 раза больше сахара, чем во втором, а третьем на 5 кг меньше чем в первом. Сколько весит каждый из мешков сахара, если все они вместе весят 125 кг?*



На весах ребята изобразили условие, потом решили уравнение.

Пятиклассник-пониматель смог решение самостоятельно воспроизвести, так как из схемы, изображающей условия задачи, легко составляется уравнение. А схема легко запоминается. Эта схема была не единственной в докладе, ребята представили несколько версий. Но данная схема оказалась самой удобной для понимания.

Группа шестиклассников такую же практически задачу, как предыдущая (вместо сахара там фигурировали груши), решила без весов, пятиклассник-пониматель ничего не понял.

Эта ситуация позволила сопоставить два доклада пятого и шестого класса и ясно увидеть роль схемы в процессе предъявления решения.

Задачу про карандаши и ручки группа решила с помощью схемы отрезков, и ребята не смогли ответить на вопросы, объясняющие решение. Ребята не могли обосновать свой чертёж: почему одинаковыми изображены отрезки, символизирующие цену ручки и цену карандаша, ведь в условии задачи этого не говорится.

Коллективно мы после каждого доклада предпринимали усилия, чтобы на весах провести решение собственно уравнения. Постепенно вводились значки, изображающие единичные и неизвестные веса груза. Но школьники не стремились прийти к некому единому для всех алфавиту значков, и даже не видели в этом никакого практического смысла. Каждый использовал свои личные обозначения. И вопрос о том, какой знак лучше (удачнее, удобнее), не очень-то был понятен «населению» игры. У меня, как руководителя игры, нарастало ощущение общего хаоса.

Домой дети ушли, как и положено, с заданием: решить на весах уравнение с отрицательным свободным членом: $2x + 1 = -3$

А взрослые остались размышлять над тем, что же мы получили и как двигаться дальше.

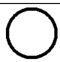
Рефлексия с педагогами

Как богатый всяческим содержимым хаос превратить в порядок? С этой мыслью мы приступили к рефлексии с педагогами. В рефлексии и появилась идея: полученный в работе общего заседания материал структурировать с помощью таблиц. Таблица как средство хороша тем, что она делает видимыми две важнейшие характеристики обрабатываемого материала. Первая характеристика – это *отношение* между определёнными сущностями, которое мы устанавливаем с помощью таблицы. В шапке мы задаём сами сущности, в строках – конкретные устанавливаемые нами отношения. Вторая характеристика представлена столбцами – это набор элементов.

В ситуации, когда мы создаём сложную многоэлементную модель, которая находится в отношении к языку алгебры и сама создаётся как язык, таблица позволяет участникам процесса удерживать единое поле коллективной работы.

Как мы обходились без таблиц в предыдущих играх на эту тему? Всегда были дети, которые легко удерживали общее пространство в своём сознании (во многом за счёт системы РО в начальной школе: там специально отрабатываются переходы от языка отрезков в язык алгебраических выражений и обратно). Такие дети выступали авангардом в коллективной мыследеятельности. Но наверняка были и такие, кто плохо успевал за событиями, не мог уследить за всеми перипетиями игры. Для них таблицы были бы хорошим подспорьем, но мы, по всей вероятности, ориентировались в большей степени на успешных ребят, на их скорость продвижения.

В рефлексии с педагогами мы различили ***элементы*** модели и ***операции*** с элементами и создали две соответствующие таблицы. Наш расчёт был на то, что педагоги смогут использовать идею таблиц для организации рефлексии в группах. Это было сборкой содержания первого дня и формой рефлексии для педагогов.

Элементы модели	***Знак элемента***	***Примечания***
Единичный грузик		
Взаимное расположение чаш		«Гусики» – носики чаш (слово хорошее)
Неизвестная величина – некий груз		
Отрицательная единица – шарик		

Операции с элементами на весах	***Знак операции***	***Алгебраический аналог***
Убрать с чаши весов некий груз	/	Вычесть величину из одной части уравнения
Поделить на равные части наполнение чаш	¦	Разделить обе части уравнения на одно и тоже число
Доложить на чашу некий груз	Знак докладываемого элемента	Прибавить величину к одной части уравнения

Второй день

Установочный доклад

В установочном докладе перед началом второго дня игры мне важно было задать интенцию на сборку общего пространства уже для школьников. Перво-наперво – увидеть алгебру как бы со стороны, чтобы потом можно было её сравнить с языком модели весов.

> Люди научились решать уравнения очень давно, во времена Древней Греции. Но тогда уравнения имели совсем другой вид, записывались по-другому. Не было специальных знаков для цифр. Они обозначались буквами греческого алфавита с чёрточкой сверху. Не было знаков для записи операций. Для этого тоже использовались специальные буквы. Сейчас гораздо проще работать с уравнениями. Почему? Что из себя представляет язык алгебры?
>
> В алгебре буквами обозначены неизвестные величины, цифрами – известные величины, есть специальные знаки для операций (+, –, =).
>
> Как обстоит дело с нашими весами? Тоже есть разные элементы и операции, но другие, чем в алгебре.
>
> Хорошо бы в форме таблицы собрать всё, что мы уже получили, разрабатывая язык весов. В докладах от групп должно быть представлено решение уравнения с отрицательным свободным членом и вариант общей сборки содержания. Но сначала самостоятельная работа.

Самостоятельная работа

5 класс решает уравнения.

6 класс решает одно уравнение и систему уравнений (на уроках они этого ещё не проходили).

Результаты самостоятельной работы малоутешительны. Многие дети использовали картинку весов только для украшения листочка, решалось уравнение по-другому. Грустно это, ну да первый день игры редко приносит результаты другого качества.

Доклады групп

Пятый класс (свеча). Самое печальное зрелище в игре: группа вынесла доклад, в содержании которого все докладчики путаются, ни на чём не решаются настаивать. Между тем, на ватмане есть решение уравнения, решение на модели весов, и в нём наличествует знак минус. Грузик с обратным знаком изображён значком воздушного шарика. Вроде бы на бумаге всё замечательно, но вид докладчиков довольно жалкий.

> Это типичная картина, когда решение детям в группе подарили, или навязали, или «втюхали». Игровой жаргон здесь безжалостен. Ситуация заключается в том, что игротехник не вынудил детей трудиться над вопросом, делать ошибки, но пытаться. Пытаться самим, во что бы то ни стало самим, найти решение. Когда такая работа проделана, даже и подаренное решение переживается как собственное, т. к. добыто оно «кровью и по́том».
>
> Организовать такую коммуникацию со школьниками непросто, надо обладать терпением, и неподдельно интересоваться тем, что думает маленький человек, как его мысль работает, что тормозит его понимание. Для этого надо научиться **слушать,** выслушивать ребёнка до конца! Даже тогда, когда хочется побыстрее сказать своё правильное, и закрыть вопрос. Это важнейшая базовая способность любого педагога. А мыследеятельностная педагогика без такого умения просто не может быть освоена.

Пятый класс (задача). Эта группа поступила мудро, не стала рваться вперёд к новым результатам, оставляя позади непроработанный, неосвоенный момент. В решении уравнения к задаче нельзя было пройти за счёт обсуждённых ранее нами процедур (убрать или доложить одинаковые грузики на обеих чашах), и ребята «изобрели» процедуру деления на равные части содержимого обеих чаш весов. Эта новая процедура позволила получить решение.

Казалось бы, группа работала не по заданию, полученному в установке. Но группа сделала свой выбор и осуществила осмысленный шаг в проработке модели. И таким образом ответила по-своему на тему дня.

Шестой класс (группа Эдуарда Игоревича). В докладе ребята представили свой способ решения системы уравнений. Группа получила серьёзный результат, ведь ребята вообще до сих пор не имели дело с системами уравнений. Решение было получено способом подстановки. Отношение неизвестных величин, данное на одних весах, было использовано, чтобы подставить выражение одной неизвестной через другую на вторые весы и получить на них одно-единственное неизвестное. Дальше решение строилось уже отработанным образом.

Этот доклад включил активность экспертов. Группа экспертов по моделированию задала шестиклассникам вопрос, который по всей видимости обсуждался в группе. Вопрос: на вашей картинке не видно, что две пары весов – это система. Какой знак можно использовать, чтобы показать систему?

Ребята, над вопросом долго не размышляя, предложили использовать значок системы из алгебры. Старшеклассников такой вариант не устроил (им очень хотелось рассказать свою находку: связывать жёстко две пары весов, превращая их таким образом в одни весы). Но группа шестиклассников уступать в коммуникации никому не собиралась, включился и Эдуард Игоревич: «Нужен третий значок весов. На первых двух неизвестные грузы должны обозначаться разными знаками, а вот на третьих весах неизвестные величины попарно должны быть уравновешены, что показывало бы на системную связь весов». Правильная, но довольно громоздкая символическая конструкция, она создаст неудобство в оперировании на модели весов. Ведь и в алгебре такая же точно конструкция была бы правомерна, но там избрали более простой в обращении вариант – знак системы.

> До консенсуса мы в этой точке не дошли, но очень важен для игры был сам прецедент спора и разногласия между взрослыми педагогами и школьниками. Никто не изображал разные точки зрения, разговор вёлся всерьёз. Это норма для образовательной ОДИ. Может быть, игра – это единственное место, где можно научиться противостоять тому, с чем не согласен, даже если ты не согласен с мнением авторитетного взрослого человека. Для нас это очень важный момент, показатель зрелости коллектива.

Группа экспертов на материале этого обсуждения предложила такую таблицу, как новое средство для участников игры:

Работа с системой уравнений	*Работа с весами*	*Знаки и пояснения*

В этой таблице можно сопоставить приёмы и способы работы с весами и с системами алгебраических уравнений.

Ещё одно предложение экспертов касалось оптимизации самих знаков в модели весов. Группа предложила стрелочкой с остриём вниз обозначать единичный грузик, и стрелочкой с остриём вверх обозначать единичный грузик со знаком минус. Стрелочка показывает направление силы, действующей на чашу весов.

$\downarrow$ $\uparrow$

Выступили ещё две группы шестиклассников, но таблиц в этот день в докладах так и не появилось. Видимо, всё время групповой работы расходовалось на конкретные решения. У кого-то остались хвосты с первого дня, домашнее задание оказалось довольно сложным, кроме того добавились вопросы из самостоятельной работы. Для того, чтобы перейти к систематизации материала, видимо нужен «налёт часов» – объём нарешанных уравнений.

А очередное **домашнее задание** предлагало новый вопрос: как обозначить *неизвестную* величину со знаком минус, так чтобы стало понятно, как решать такое уравнение на весах.

Третий день

С домашним заданием справились немногие. Однако третий день – день сборки, его основная задача: отрефлектировать, собрать всё, что наработано. Может статься, что неизвестная величина со знаком минус как очередная ступенька в создании модели весов останется на перспективу.

Установочный доклад

Языки

– *Какие языки знаете?*

– Русский, английский, французский... много знаем.

– *Правильно, это языки разных народов. Скажем **естественные** языки, у них нет автора, это плоды творчества целых народов. Зачем нужен язык, чему он служит?*

– Пониманию. Язык позволяет людям **понимать** друг друга.

– *При каком условии? Русский владеет русским языком, китаец китайским, однако это не позволяет им понимать друг друга. Выходит язык не всегда позволяет понимать другого человека?*

– Надо чтобы оба человека **владели одним языком**.

– *Так. А вы знаете ситуации, когда это **условие** люди использовали, чтобы изобрести **искусственный**, специальный язык, который был бы непонятен всем, кроме двух-трёх посвящённых?*

– Шифры, кодовые языки, тайные, например, «пляшущие человечки».

– *Да, эти языки изобретались, **чтобы хранить тайны**. А изобретали ли люди языки для **других целей?***

– Алгебра.

– *Ещё?*

– Дорожные знаки.

– *С какой целью этот язык был изобретён?*

– Чтобы диктовать правила действий на дороге. Чтобы предупреждать об опасных условиях.

– *А разве нельзя тоже самое сказать словами? Написать: «Обгон запрещён»?*

– На скорости не успеешь прочитать, картинку увидишь и всё поймёшь. Иностранец вообще не поймёт слов. Когда знаешь этот язык, он удобен для водителя.

– *Язык для водителей. Ещё?*

– Язык электрических схем для физика.

– *Правильно. Итак:*

1. *Язык должен быть знаком, понятен, изучен тем, кто хочет его использовать.*

2. *Язык должен работать на определённую цель.*

3. *Язык должен быть удобен в использовании его.*

Что ещё характеризует язык? Может быть так, чтобы в языке один и тот же знак обозначал разные предметы? Например: «Обгон запрещён» или «Источник тока»?

– Нет. Запутаться можно.

– Может: коса – означает и берег реки, и причёску. В естественном языке – может.

– *Точно:*

4. *Искусственные языки так придумывают, чтобы не возникало путаницы: каждому объекту – свой знак.*

Мы тоже изобретаем язык модели весов. Попробуйте в заключительных докладах увидеть плоды нашего творчества – как язык. Выполняем ли мы условия, и как мы их выполняем? Ещё раз – четыре условия:

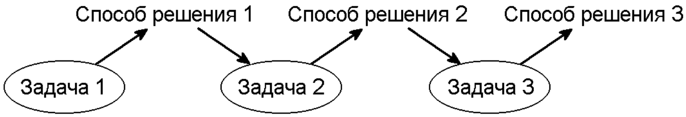
1. ***Язык должен быть понятен группе людей**. Какой группе людей в нашем случае?*
2. ***Язык должен работать на цель.** На какую цель работает наш язык?*
3. ***Язык должен быть однозначен**. Каждому обозначаемому – один и только один знак. Какие знаки мы изобрели?*
4. ***Удобны ли знаки нашего языка** вышеозначенной группе людей?*

Используйте таблицы для представления языка.

В этот день время на работу групп было увеличено.

Открыла пленарное заседание **группа экспертов**, предупредив, что это только часть доклада, вторая часть будет посвящена решению уравнения с отрицательным коэффициентом при неизвестном:

– Мы увидели способ нашего коллективного движения в игре. Выглядит он так:



Сначала мы решали задачу *(задача 1)*, потом выделяли способ решения этой задачи *(способ 1)*. Затем мы получали новую задачу *(задача 2)* и пытались применить известный нам способ *(способ 1)* для решения задачи 2. Способ не срабатывал, поэтому приходилось способ дорабатывать. Так мы получали способ 2. И т. д.

Доклад получился бы гениальным, если бы группа проиллюстрировала свою формальную конструкцию реальными задачами и реальными способами их решения, которые были в игре. Сами мы (слушатели) такую подстановку конечно же не могли осуществить по ходу доклада, поэтому он был принят аудиторией прохладно.

Однако, сам по себе интерес к **форме** – показателен, это обычно случается со всеми, кто начинает осваивать методологию. Важно только на этой фазе не остановиться, уметь выделять **форму** очень важно, но не менее важно научиться заполнив её **материалом**, выходить на **содержание**.

Группа **пятиклассников** (свеча) изобрела свою таблицу для упаковки собственного содержания:

Опыт
Модель весов
Знаки
Операции

Выступление второй группы пятиклассников ознаменовалась дискуссией, а проще говоря – спором между пятиклассником Виктором и учителем математики Эдуардом Игоревичем. К этому дню группа освоила операции на весах, связанные с отрицательным числом, и Виктор бесстрашно вмешался в спор взрослых, чтобы отстоять своё понимание способа решения. Что Эдуард Игоревич горячо и поприветствовал.

Все группы шестого класса систематизировали материал игры в таблицах, каждая группа по своему. Во всех таблицах школьники различили решение уравнения на модели весов и в алгебраическом виде, однако в речи частенько путались, смешивая разные языки. Что, впрочем, было неизбежно при таком маленьком стаже освоения нового языка.

Более серьёзный недочёт – это отнесение модели весов к реальному миру, в противопоставление миру мышления, где живёт алгебра. Эта ошибка обнаружилась впоследствии и во многих детских рефлексиях. Конечно, модель весов гораздо более близка опыту детей, чем алгебраическая операторика. Мы уравновешиваем грузики, снимаем с чаш или докладываем новые элементы – совсем как в реальности действия с весами. В этом и сила модели, всегда можно себе представить, как это может происходить. Однако наши «весы» всё же очень сильно отличаются от реальных. Мы можем на них уравновешивать самые разные количественные характеристики: и стоимости, и площади, и скорости, и т. п. Наши весы не материальны, для нас не существенны размеры весов, материал, цвет. Они не могут поломаться, мы можем положить на них любой, даже очень большой груз. Нам важна только способность наших весов показать равновесие или неравновесие величин, которые либо оказывают давление на чаши весов, либо действуют противоположным образом – тянут чаши вверх.

> *Итак, нам важно только* ***действие*** *двух противоположных* ***сил*** *на чаши весов и* ***движение,*** *которое эти силы вызывают, – движение от равновесия чаш к неравновесию и наоборот.* Движение и сила – это организованности физической действительности. Фактически мы описали физическую модель. По словам И. Г. Назаровой, ***весы – это физическая модель для алгебраического объекта (уравнения).***

Группа экспертов, в завершение, показала решение уравнения, где неизвестная величина была с отрицательным коэффициентом. К сожалению «молодое поколение» не смогло оценить этот доклад по достоинству.

Последняя важная нота в нашей песне – рассказ Эдуарда Игоревича об **истории уравнения** (по материалам книги Л. Ф. Пичурина «За страницами учебника алгебры»). Фактически, за счёт этого сообщения было произведено отнесение работы маленьких школьников к культурному контексту – к Истории и Культуре математической мысли.

РЕФЛЕКСИЯ ИГРЫ

1. Диалоги на основе вопросов, предложенных руководителем игры

После игры руководитель Т. Губанова организовала рефлексию учителей. Она предложила письменно ответить на ряд вопросов. Ниже приводятся ответы учителя математики ЦО «Измайлово» Э. Бовшовского, а также фрагменты переписки его с Т. Губановой.

1. Зачем нужно решать уравнение на весах, если его можно решить на языке алгебры?

Э. Бовшовский:

Весы перед языком алгебры имеют одно существенное преимущество – наглядность. Работая на весах, можно увидеть:

- устройство уравнения,
- действия, которые нужно совершать при решении уравнения (перенос → снятие равных количеств, деление → установить эквивалент между неизвестным и известным),
- контролировать правильность преобразований, которые совершаем при решении уравнений в языке алгебры (видим равенство или неравенство частей уравнения),
- понимать правила решения уравнений, записанные в учебнике (правила возникают во время работы с весами, а затем фиксируются в языке алгебры).

2. Восстановите ход работы группы по дням, основные результаты работы группы на каждый день.

Э. Бовшовский:

1 день. После ***установочного доклада*** ученикам было предложено восстановить идею весов и задание группе, которое нужно выполнить. По мнению учеников, идея весов заключалась в наличии равновесия между левой и правой чашами весов. Группе нужно было решить уравнение $3x + 2 = 2x + 4$, используя идею весов, и подготовить доклад с результатами работы (объяснить ученику 5 класса решение этого уравнения).

Ход работы:

- Изобразить уравнение, используя идею весов (как это сделать?). Создаем язык весов. Нужно изобразить три составляющие уравнения: неизвестную величину □, известную величину I, равенство (появились знаки языка весов).

Уравнение: □□□II □□IIII

- Как решить уравнение? На помощь приходит жизненный опыт (вспоминают, что на реальных весах можно с обеих чаш снимать равные веса, и равновесие от этого не меняется). Снимаем по два и два с разных чаш – при этом равновесие не изменилось.
- В результате получили равновесие между одной неизвестной величиной и двумя единицами известной величины. (Нашли корень уравнения $x = 2$) $\underline{\square}$ $\underline{\text{II}}$
- Подготовили доклад о проделанной работе.

Результаты дня:

1) построили модель уравнения,
2) ввели элементы языка весов,
3) выполняя манипуляции со снятием одинаковых количеств, проверяли, соблюдается ли равновесие,
4) нашли корень уравнения.

2 день. *Самостоятельная работа.* Предложенное уравнение решили 6 учеников из 8, систему уравнений решить самостоятельно никто не смог.

Рефлексия работы

Попытались втянуть в работу неуспешных учеников. На примере уравнения из самостоятельной работы они, прибегая к помощи остальных участников группы, у доски справились с заданием.

Далее нужно было осмыслить результаты, полученные в первый день. Ребята хорошо восстанавливали алгоритм, полученный в первый день. Было видно, что и пленар не прошел мимо их ушей. Деление обоих количеств на равные части (это результат работы другой группы) был применен при решении уравнения в самостоятельной работе.

Но **вопрос**, зачем людям нужны весы, поверг группу в транс. Пришлось искать ответ на этот вопрос в собственной деятельности.

Помог нам анализ полученного соотношения между известными величинами и неизвестной величиной (корень уравнения). Оказалось, что нам нужно взвесить неизвестную величину (прояснили цель работы). Реализация состоит из двух шагов:

1. Нужно не нарушая равновесия собрать в одной части неизвестные величины, а в другой – части известные (если они расположены на разных чашах весов). Фиксируем, как это можно сделать. Убирать с чаш весов одинаковые количества известных и одинаковые количества неизвестных величин (правило весов № 1).

2. Далее нужно оставить на левой чаше единицу неизвестной величины, а на правой некоторое количество единиц известной величины, сохраняя равновесие. Это можно сделать, снимая

с обеих чаш равные количества, но, в отличие от первого случая, количество снятого неизвестного должно быть эквивалентно количеству снятого известного. Оба количества разделить на равное количество частей (правило № 2).

Результаты рефлексии:

– сформулировали цели работы,
– описали результат работы,
– сформулировали правила решения уравнения на языке весов.

Далее группа приступила к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

Первая трудность, с которой столкнулась группа: как на одних весах можно изобразить два уравнения. В ходе обсуждения решили каждое уравнение системы изобразить с помощью весов.

Изобразили вторую неизвестную величину так: Δ.

□□□ ΔΔ IIII

□ Δ II

Вторая трудность: в уравнении две неизвестных величины. Попытались применить способ работы, выделенный в рефлексии. Появилась последовательность шагов:

1) нужно оставить на одной чаше одну неизвестную величину, а другую неизвестную величину снять, но при этом равновесие должно соблюдаться.

   Сняли с левой чаши Δ Δ, равновесие нарушилось.

   □□□

   IIII

2) Чтобы сохранилось равновесие, с правой чаши надо снять некоторое количество I, эквивалентное снятым с другой чаши ΔΔ.

   Но непонятно, как это количество определить. В группе назревал кризис. Все усиленно искали выход из этой ситуации. Вдруг кто-то вспомнил про другие весы. Эврика! Эти весы указывают нам путь выхода из тупика. Все очень просто: □Δ эквивалентны II, а следовательно, если с левой чаши снять □Δ, а с правой чаши снять II, равновесие не нарушится.

3) На первых весах сняли с левой чаши □Δ□Δ, а с правой чаши, соответственно, – IIII и получили следующий результат. На правой чаше остался □, а левая чаша оказалась пустой. Результат: $x = 0$.

Чтобы найти значение y, надо взять вторые весы и снять с правой чаши □. С левой чаши снимать ничего не надо, так как □ эквивалентен 0. Равновесие не нарушается, а следовательно $\underline{\Delta}$ $\underline{\text{II}}$, то есть $y = 2$. Система уравнений решена.

Далее группа готовила доклад, в котором рассказывала о своих открытиях в этот день.

Результаты дня:

1) удалось переформулировать задачу с языка алгебры на язык весов;
2) удалось описать на языке весов результат нашей работы (что мы с помощью весов находим);
3) выделен способ работы и операции с весами;
4) сформулировали два правила работы с весами;
5) полученные результаты применили в новой ситуации (решение системы).

3 день. В третий день игры группа должна была полученные правила действий с весами перевести в правила решения уравнений (на алгебраическом языке). Эта задача была выполнена во время рефлексии работы предыдущего дня. Для этого мы взяли несложное линейное уравнение и, решая его с помощью весов, одновременно описывали решение уже на языке алгебраических правил.

$$5x + 2 = 2x + 11$$

$$\underline{\square\square\square\square\square\text{II}} \quad \underline{\square\square\text{IIIIIIIIIII}}$$

Операция 1: снимем с обоих частей по □□ и по II.

$$\underline{\square\square\square} \qquad \underline{\text{IIIIIIIII}}$$

Алгебраическое правило: из обеих частей уравнения можно вычитать одну и ту же величину, равенство от этого не изменится.

Операция 2: количество величин на чашах весов разделим на три равные части: $\square \to \text{III}$.

Алгебраическое правило: обе части уравнения можно разделить на одно и то же число, равенство от этого не изменится.

$$\underline{\square} \qquad \underline{\text{III}} \qquad x = 3.$$

Далее группа готовила доклад.

Результаты дня:

1) группа получила и сформулировала несколько алгебраических правил решения уравнений (пусть даже в несколько сыром виде);

2) открыла для себя загадочный язык алгебры.

3. Каковы были ваши основные цели, менялись ли они по ходу игры?

Э. Бовшовский:

Ох уж эти цели! У меня они формируются не сразу, а где-то к концу первого дня игры, когда начинаю понимать, что происходит на плацдарме. В этот раз я для себя сформулировал две основных цели:

– понять, как модель помогает создавать и описывать правила решения уравнений (в математике 6 класса есть несколько тем, на которых этот прием можно применять)

– наладить взаимодействие игротехника и группы с другими участниками игры (появление в игре группы старшеклассников – экспертов, это новый для них функционал, требующий от ребят применения на практике способностей, которые они воспитали в себе в ходе предыдущих игр).

В ходе игры цели оставались неизменными.

Т. Губанова:

Если пользоваться различением из первой части нашего разговора: различение содержания и деятельности (педагогической или методологической...), то первая цель Ваша лежит в плоскости содержания. И как я уже отмечала, в этой плоскости Вы сильны. Второй тезис относится к плоскости деятельности, Вы обсуждаете взаимодействие. И это очень важно. Но до цели пока не дотягиваетесь. В деятельностном поле цель характеризуется отчётливой позиционностью. *Как кто* вы хотите вступить во взаимодействие? И какой результат взаимодействия Вы хотите получить?

Например, можно из позиции *учителя математики* (акцент на математике) принять цель разные фрагменты игрового содержания оформлять как способы работы в предмете математика и делать в процессе игры экспертные заключения.

Из позиции *учителя* можно отслеживать и возвращать ученику ситуации, когда тот совершает Поступок, как акт взросления, самостояния: «Сейчас, на ваших глазах, впервые в истории школы ученик пятого класса решился спорить со «страшным» Эдуардом Игоревичем, отстаивая своё решение. Молодец!»

Из позиции *игротехника и методолога* важно на материале самых разных выступлений видеть и оформлять ***обобщенный способ работы***, заботиться о том, чтобы этот способ начинали использовать другие люди. Это, конечно же, только примеры, и ими не исчерпываются возможности самоопределения в игре.

4–5. Основные трудности, с которыми Вы столкнулись. Когда и как эти трудности проявились? Выделите ситуации, когда Вы фиксировали для себя несовпадение между пониманием детей и Вашим планом действий. Как Вы вышли из этой ситуации?

Э. Бовшовский:

В первый день, наблюдая за работой детей по решению уравнения, я задал себе вопрос: «Понимают ли ученики, почему так устроен алгоритм решения уравнений с помощью весов?» Работа понимающих у доски ещё больше убедила меня в том, что воспроизвести алгоритм решения (повторить) для учащихся 5 и 6 классов большой проблемы не составляет. Этому их хорошо обучили в начальной школе. На утренней рефлексии в группе оказалось, что я ошибался. Два человека не могут решить видоизменённое уравнение (не воспроизводят даже алгоритм). А те, кто решили его, в основном используют жизненный опыт работы на весах. Толком объяснить, почему алгоритм устроен таким образом, не смог никто.

Пришлось строить феноменальный план (раскладывать работу на отдельные шаги и смотреть, какую задачу решаем на каждом шаге). Снятие с чаш весов одинаковых количеств неизвестных величин и известных величин решает задачу уединения некоторого количества взвешиваемых величин на правой чаше весов и уединения известного количества на левой чаше весов. Деление на равное количество частей решает задачу взвешивания единицы неизвестной величины, определяя её через количество известное. В итоге прорисовывается **основная задача взвешивания**, о которой ученики имеют смутное представление. Поэтому **при переходе из языка уравнений в язык весов нужно ещё сформулировать задачу на этом языке**.

Т. Губанова:

Очень грамотная игротехническая работа! Вы сформулировали задачу, которую должны решать дети, причем вместе с детьми, Вы обнаружили причину непонимания и неуспешности детей и превратили её в задачу. Это классика игротехники и МД-педагогики. Моя мечта – иметь команду игротехников, способных на такую работу. Теперь критика: это открытие надо было обязательно обсудить на рефлексии. А ещё лучше выступить прямо в игре. Ведь Вы фактически вышли на характеристику обобщенного способа действия: если мы работаем в двух разных языках, то при переходе в новый язык (при освоении языка) необходимо формулировать задачу на этом языке.

Это важно было услышать всем участникам игры. Для меня, например, этот момент оестествлён, я его осуществляю, не рефлектируя и не замечая даже. Но у детей не так, и научить их ничему невозможно, не проработав этот момент.

6. Вопросы, оставшиеся без ответа.

Э. Бовшовский:

Я опять про вычитание. Ход понятен, но не доказан с помощью весов: «$3x - 2$» – это то же, что «$3x + (-2)$»?

Т. Губанова:

На весах элементы, которые взвешиваются, не складываются и не вычитаются друг из друга. Они просто укладываются на чашу. Элемент состоит из цифр, буквы и знака (+ или –). Знак плюс или минус не операцию на весах нам диктует, это одна из характеристик элемента, который мы укладываем на весы. А вести себя на весах он может одним из двух образов: давить на чашу, либо тянуть её вверх.

Мы так устраиваем свою модель, в этом наша воля и право, если только это не ведёт к противоречиям.

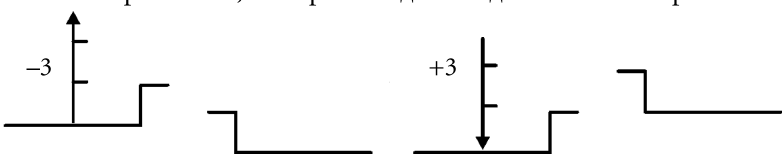
Э. Бовшовский:

Очень трудно с понятием веса. Судя по тому, что мы определяли направление – это величина векторная. Можно ли обойтись в языке модели весов без этого?

Т. Губанова:

Нельзя. Это принципиально. Весы – физическая модель. Это значит, что мы имеем дело с движением и силой, которая вызывает движение. Движение так же неизбежно для действительности физики, как величина для математики. Различие математической и физической действительности – страшно важный вопрос, и вообще-то это вопрос данной игры в том числе. Но это не единственный вопрос, до которого мы не дотянулись. Весы – это физическая модель для математического объекта – уравнения. В этом фокусе (обычно бывает наоборот) вся прелесть ситуации.

В векторной величине что-то есть! Можно изображать груз отрезком со стрелочкой, который поделён единичными отрезками.



Э. Бовшовский:

Работа на весах с неизвестной величиной... Как ее обозначить: грузиком или шариком, если вначале мы о ней ничего не знаем? Соответственно, не можем сказать, какое действие на чашу весов оно оказывает?

Т. Губанова:

В Новосибирске дети предложили неизвестную величину изображать значком тумана. За туманом мы не видим, что скрывается. А неизвестную величину со знаком минус – красным туманом. Красный туман тоже скрывает величину, и мы про неё ничего не можем сказать, кроме одного – величина эта направлена в противоположную сторону, чем та, что скрывается за белым туманом. Но это мы можем сказать твёрдо. Текст А. В. Нечипоренко, где всё это описано, есть в моей книжке «Опыты мыследеятельностной педагогики».

Я получила огромное удовольствие от общения. Всего наилучшего!

Э. Бовшовский:

Получил Вашу рецензию на мою рефлексию. Большое спасибо Вам за это. Последний раз мою педагогическую работу подвергал такому анализу В. А. Жегалин в далеком 1999 году, когда мы готовились к семинару в Греции. В школе послеигровая рефлексия обычно сводится к обмену впечатлениями. Из Вашего анализа сразу видно, что получилось в игротехнической работе, а над чем надо задуматься и проработать. Я очень долго пытался понять, как удерживать тот объём информации, который выдают дети, и выделять общий способ работы, как это можно сделать. Пришлось почитать Ваши работы, работы В. А. Жегалина, работы Громыко и понять, как на практике это можно организовать. Очень рад, что труды не прошли даром. План педагогического действия для меня не менее интересен, но в нашей ранней работе мы, по всей видимости, очень мало уделяли внимание этому аспекту педагогической и игротехнической работы. Постараюсь на следующих играх обратить особое внимание на этот аспект. С детскими докладами все проще, их можно отрепетировать. За счет репетиции докладов мы решили первую задачу – оторвали докладчиков от бумаги и обратили их внимание на работу с залом. Чтобы доклад был интересен другим группам, надо при подготовке выделить момент работы или результат, который поразил тебя самого.

Т. Губанова:

Это очень точно, важно поделиться чудесным. Ведь чудо в нашей жизни есть, но мы разучились узнавать его, ярко переживать его. Разучились воплощать переживание этой встречи в слово, в образ, в звук, в движение, в сад, в здание, в семейные и дружеские отношения. Научиться самому и научить этому детей – ради этого стоит жить. Вообще-то, это и есть, с моей точки зрения, одна из предельных задач педагогики.

Э. Бовшовский:

К сожалению, на качественную подготовку доклада очень часто не хватает времени. Когда работу в группе доводишь до промежуточного результата, то оказывается, что до пленара остаётся немного времени. Интересно, сколько времени нужно, чтобы качественно подготовить доклад? Далее постараюсь восстановить (насколько это возможно) некоторые моменты работы в группе. Помню не всё (жалко, что, живя в XXI веке, не пользуешься техническими средствами в работе).

Т. Губанова:

В начале много надо времени, и его всё равно будет не хватать, потом мало, а в пределе – импровизация. Мне очень важны такого рода замечания. Я ведь многое в игре пробую впервые, ищу идеальную форму, пусть до этого пока и далеко.

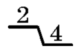
О восстановлении работы. Нужен диктофон и расшифровка записей. Я в своей жизни расшифровала километры плёнки, это очень помогает осваивать дело.

Э. Бовшовский:

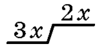
Первый день. Идею весов мы зафиксировали словесно. А так как далее при решении уравнения эту идею нужно было всё равно схематизировать, я решил, что это мы сделаем в ходе работы. Схематизация идеального (как показала дальнейшая работа) – это приём, который ученики уже используют в своей работе.

Работа по решению уравнения. Очень подробно, «по ролям» не получится, но основные моменты воспроизвести могу. Задача, поставленная перед группой: решить уравнение $3x + 2 = 2x + 4$ и объяснить «понимающему» (ученику 5 класса) решение этого уравнения. Некоторое время каждый ученик самостоятельно искал способ решения уравнения с помощью весов. Показать свой способ решения у доски изъявили желание Иннокентий Козлов и Алексей Королёв. Все остальные участники группы должны были выступить в роли «понимающего». Выступление Иннокентия Козлова:

Тезис 1. С помощью весов сравним известные величины. Различие между известными величинами равно 2.



Тезис 2. С помощью весов сравним неизвестные величины. Различие между неизвестными величинами равно x.

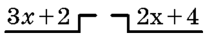


Тезис 3. Следовательно, $x = 2$.

Интересно было, что скажет группа по поводу данного способа решения уравнения. У группы появились вопросы и критика:

- с помощью весов нельзя взвешивать числа и выражения;
- нет схемы, на которой всё уравнение, и нет идеи равенства, о которой мы говорили вначале;
- не показано, как с помощью двух предыдущих рисунков получено последнее равенство.

Всё это спрашивали дети. Чувствуется, что была проделана работа по сопоставлению схемы и условия задачи. Ответ на последний вопрос: в уравнении есть действие сложения, надо сложить величины на левой и правой чашах. А так как в уравнении есть знак равенства, то выделенные различия исчезнут, поэтому различию между неизвестными величинами (x) будет соответствовать различие между известными величинами (2):

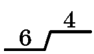


Т. Губанова:

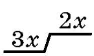
Красиво. Ученик увидел в качающейся свече отношение неравенства и построил свою работу, основываясь на этом отношении. Решили проверить, как этот способ пройдёт проверку «понимающим»?

Э. Бовшовский:

Я очень тихо подсунул «понимающему» уравнение типа $3x + 6 = 2x + 4$. «Понимающий» очень быстро воспроизвёл последовательность действий Иннокентия и получил, что $x = 2$. Но ожидавший своей очереди Алексей сказал, что мы получили неправильный результат. В школе нас учат проверять полученные решения, и если подставить 2 вместо x в уравнение, то не получится равенство. Значит, где-то спряталась ошибка. Что бы вскрыть ошибку, потребовалось сопоставить оба варианта:



и



Очень тяжело в данной ситуации обнаружить, что при переходе от неравенства к равенству надо ещё учитывать различные случаи взаимного расположения чаш весов.

Способ очень трудный – такое заключение сделала группа.

Т. Губанова:

Вы блестяще обработали эту ситуацию, способ проверен на практичность. Интересно, а сам автор увидел недостатки? Или он готов усовершенствовать своё изобретение? Сам факт-то замечательный – ребёнок предложил своё! Конечно, в игре нет времени, чтобы все ниточки вытягивать, но в принципе было бы важно, чтобы Иннокентий сам поисследовал возможности своей конструкции. Что будет если три, четыре слагаемых в уравнении? То, что Вы начали делать, предложив уравнение, не имеющее решения.[1] Тогда Иннокентий либо стал бы развивать свою идею, либо увидел бы сам её ограничения и сам принял решение о границах её применения. Это уже образец культурной работы математика. Может быть, можно ввести опыт подобных «курсовых» для школьников с оценкой, например, тремя пятёрками? Так, чтобы для Вас это сильно работы не прибавило, а дети бы учились ценить свои идеи и работать на них.

Э. Бовшовский:

Далее группа решила послушать выступление Алексея.

Изобразим с помощью весов равенство:

Далее известную величину будем обозначать **I**, неизвестную – □. Тогда наше уравнение с помощью весов будет выглядеть так: □□□**II** □□**IIII** .

Затем Алексей с помощью данной модели продемонстрировал ходы в решении уравнения (про это я уже Вам писал).

После выступления Алексея группа зафиксировала основные шаги, которые увидела в предложенной им работе. Моя работа в основном сводилась к постоянному напоминанию группе, что всё самое ценное надо зафиксировать. Ребята самостоятельно работали у доски. Обсуждение выступления я запускал традиционным для моих учеников вопросом: «Про что этот текст?». Очень часто в ответ на этот вопрос я слышу очень подробный пересказ увиденного (наследие начальной школы). Группа, сопоставляя пред-

[1] То есть уравнение не имеет решения способом Иннокентия.

ложенные им способы работы, отметила, что второй способ более нагляден и прост для понимания.

Т. Губанова:

Можно вопрос усилить: «Про что этот текст? Нарисуй главную мысль». Но в любом случае Вы выходите на пленар с мощным заделом. Надо планировать свои действия в отношении других групп. Действием может быть вопрос по типу тех, что вы в группе использовали. Действием может быть предложение отработанных удачных знаков для схематизации смысла, который выступающая группа в тексте выражает. Знаки лучше всего вводить в режиме понимания: «Правильно ли я вас понял, вы имеете ввиду это...» (следует рисунок и проговаривание на нём мысли). Вы это уже в группе отрабатывайте, требуйте, чтобы дети вели себя так же на общем плацдарме. Для начала демонстрируйте это сами, а в рефлексии обращайте на это внимание: «Как вы думаете, зачем я задал вопрос (нарисовал схему)?».

Э. Бовшовский:

Второй день. У доски один из членов группы на модели весов имитировал действия по решению уравнения, остальные должны были описать каждый шаг его работы, то есть описать, что произошло, и составить текст. Основная демонстрационная работа проходила на модели, а правила оформляли текстом.

Решение системы. Идея изображения каждого уравнения системы на отдельных весах появилась у ребят после того, как они не смогли на одной модели изобразить оба уравнения (не было даже попыток). Тогда один из участников группы предложил использовать старый опыт и изобразить каждое уравнение отдельно. На уроках математики мы часто сталкиваемся с новыми задачами, разрешить которые мы можем, используя старое знание.

Т. Губанова:

Тут идеи могли появиться только после фиксации вопроса: чем система отличается от единичного уравнения? Что означает фигурная скобочка? Впрочем, вы к этому сами пришли в дальнейшем.

Э. Бовшовский:

Далее. Группа столкнулась со случаем нарушения равновесия. Всем было понятно, что равновесие надо восстановить. Но вот *как* это сделать, не знал никто. Оля Куцобина посмотрела в записи утреннего выступления и обнаружила там подсказку: то значение переменной, которое мы должны получить, является решением каждого уравнения (по сути, она воспроизвела задачу). Далее

Алексей Королёв высказал предположение о сути второго уравнения в системе. Оно должно нам указать на эквивалентность количеств снимаемых с чаш весов. Затем он решил систему. Ученики 6 класса выполняют всю работу на доске, мне остается только сдерживать творческий порыв детей, дабы они не проскочили мимо своих открытий.

Доклад мы готовили в спешке (не хватило времени), поэтому выступающие собрали основные результаты работы, составили себе тексты выступлений и несколько раз их проговорили. Воздействие на пленар мы не планировали (это недостаток, я согласен). Скорее мы подготовили просто отчёт о проделанной работе. Очень хорошо, что Вы описываете цели разных позиционеров в игровом поле. У нас в школе никто про это разговоров не вёл. На следующей игре по литературе постараюсь на это обратить внимание. Вот практически и всё.

Ещё раз большое спасибо. До свидания, Э. Бовшовский.

2. Рефлексия игры ученицы 10 класса Е. Никишиной с комментариями Т. Губановой

1. Весы – одна из моделей решения алгебраических задач, точнее, уравнений. Весы наглядно показывают равенство или неравенство. Весы и язык алгебры – всего лишь знаки, но знак весов изображает зависимость одного от другого с более привычной точки зрения.

2. Умение задавать вопросы способствует более глубокому пониманию. Если не озвучивать свое непонимание, то не сможешь понять способ работы других. Сначала всегда кажется, что всё понятно, но когда сталкиваешься с другим мнением, возникают сомнения, непонимания. Критика, как и вопросы, продвигают работу и мыследеятельность. Может показаться, что работа завершена, но критика не дает расслабиться. Отношение других людей очень важно, так как возникает столкновение мнений.

Т. Губанова:

> Часто не удаётся столкнуться с другим мнением, поэтому надо научиться имитировать спор в собственном мышлении. Это означает, что надо сначала зафиксировать своё исходное понимание, а потом попробовать оспорить его, увидеть предмет размышления как бы с другой стороны. Сразу появится «объём» видения, появятся и вопросы, и непонимание. Вы правы, что «искусство непонимания» – важнейшее в процессе формирования мышления.

3. Задачу нашей группы на игре я поняла только в последний день игры. Нам было нужно самим решать все задачи, предлагаемые для рассмотрения, фиксировать возникшие в ходе работы вопросы и трудности, ведь с ними могли столкнуться и другие группы. Иногда группы обходили эти трудности, но надо было обратить их внимание на это.

На мой взгляд, главная задача нашей группы состояла в том, чтобы показать пяти- и шестиклассникам способ работы на пленаре и в группе. И научить задавать даже «глупые» вопросы на понимание.

Т. Губанова:

> Очень красивое самоопределение! Кстати, когда работаешь с маленькими детьми, важно не только демонстрировать способность задавать вопросы, но и комментировать свои действия: «Посмотрите, я задала вопрос Маше (вопрос воспроизводится), отвечая на него, Маша сделала замечательную вещь (вещь ещё раз проговаривается или прорисовывается более внятно, чем это было у Маши). Например, так. Тогда Ваше действие было бы законченным и эффективным. Дети ведь сами ещё не могут рефлектировать общее деятельностное пространство.

4. Игра была мне интересна, так как была представлена модель, с которой сталкивается каждый, но я никогда не думала, что весы могут служить одним из средств решения уравнений. Я не знала, как решать уравнения с отрицательными коэффициентами. Спасибо Вальтеру за идею с шариками, которые имеют отрицательный вес. Нужна ли группа экспертов по моделированию? Думаю, да – ведь на примере разных задач, поставленных перед группами, демонстрируется один и тот же способ работы.

6. Вопросы без ответа: я не могу понять разницу между способом, ходом, средством. Что есть алгоритм? Рефлексия?

Т. Губанова:

> Хорошие вопросы, надеюсь будет ещё возможность с ними разбираться. Эти вопросы методологические, жаль что Вы не заинтересовались самой моделью весов и решением уравнения на этой модели. Сама модель и её устройство – это план содержания игры. Без продвижения в содержании, без содержательных вопросов продвигаться в методологическом плане (в плане метода) не получится. Это Вам на будущее. Для первого раза Вы прошли игру очень мощно, работа с формой – это стандартный шаг людей, начинающих осваивать методологию.
>
> С уважением, Т. М. Губанова.

Приложение *по материалам книги Л. Ф. Пичурина «За страницами учебника алгебры»*

ИЗ ИСТОРИИ УРАВНЕНИЯ

Ещё древние египтяне для удобства рассуждений придумали специальное слово, обозначавшее неизвестное число, но так как у них ещё не было знаков равенства и знаков действий (вроде наших плюса и минуса), то записывать уравнения они, конечно, не умели.

Первый серьёзный шаг в этом направлении сделал замечательный александрийский учёный **Диофант,** использовавший в своём творчестве достижения египтян, вавилонян, греков. Жил Диофант, по-видимому, в III веке по Р. Х. Диофант придумал обозначения для неизвестных. Во времена Диофанта языком науки был греческий. Но греки ещё не знали цифр и обозначали числа при помощи букв своего алфавита. Первые девять букв α (альфа), β (бета), γ (гамма)... обозначали числа от 1 до 9, следующие девять: ι (йота), κ (каппа)... обозначали числа от 10 до 90; наконец, следующие девять: ρ (ро), σ (сигма)... обозначали числа от 100 до 900. Чтобы не ошибиться и не принять число за слово, над буквами, обозначающими число, ставилась чёрточка. Букв в алфавите было 28. Одна из них была особой — она обозначалась ς (сигма концевая), ставилась только в конце слов и числового значения не имела. Вот ею-то Диофант и стал обозначать первую степень неизвестного, так же как мы обозначаем её буквой x. Квадрат неизвестного он обозначал значком Δ^{υ} (первые две буквы греческого слова Δύναμις — «дюнамис», что значит «сила»).

Вместо слово «получится» или «равняется» Диофант стал писать ισ — две первые буквы слова ισος («исос» — равный). От этого слова произошли такие термины как изотопы, изобары, изотермы.

Диофант придумал знак и для вычитания — им служила буква ψ (пси), только перевёрнутая, укороченная и упрощённая по форме — вот такая: $\pitchfork$

А без знака сложения Диофант обходился довольно просто — слагаемые записывал рядом друг с другом. Диофант записывал коэффициенты справа от неизвестных, кроме того, в уравнениях он обязательно ставил перед свободным членом значок $\overset{o}{M}$, первые две буквы слова Μοναϛ («монас») — единица. Например, если свободный член был 13, он писал «тринадцать единиц»: $\overset{o}{M}\iota\gamma$.

Уравнение $3x^2 - 10x = 13$ Диофант записал бы так:

$$\varsigma\Delta^{\upsilon}\bar{\gamma} \pitchfork \varsigma\bar{\iota}\ \iota\sigma\ \overset{o}{M}\iota\bar{\gamma}.$$

Диофант придумал ещё несколько математических знаков, но их в наше время не применяют. Придумал Диофант и два основных приёма решения уравнений — перенос неизвестных в одну сторону уравнения и приведение подобных членов.

В средневековой Европе мысли Диофанта получили большое распространение и развитие. В XVII—XVIII вв. буквами для обозначения неизвестных (переменных) стали пользоваться уже все математики. Приёмы решения уравнений попали в Европу особым путём.

В VII—VIII в. по Р. Х. арабы завоевали огромные пространства и создали на них государство, охватывавшее территорию, на которой ныне расположены многие государства Северной Африки (включая Египет) и Азии (Иран, Сирия, Ирак, страны Закавказья и Средней Азии, часть Афганистана). В 762 г. столицей этого государства-халифата стал город Багдад, нынешняя столица Ирака.

Народы, завоеванные арабами, по культурному уровню и знаниям были значительно выше завоевателей. Особенно это относилось к сирийцам, успевших к тому времени перевести на свой язык труды великих учёных Древней Греции — Аристотеля и Платона, Гиппократа и Галена, Евклида и Архимеда и многих других. Правители халифата хорошо понимали, что у древних стоит и нужно учиться.

В Багдаде был создан «Дом мудрости», куда по воле халифа собрали образованных людей со всех сторон халифата. Эти мудрецы не только переводили труды своих великих предшественников, но и творили сами. Одним из них был Мухаммед Бен Мусса **аль-Хорезми** (787 – ок. 850). «Аль-Хорезми» означало, что Мухаммед сын Муссы родом из Хорезма. Хорезм, крупный оазис в низовьях Амударьи был заселён людьми в глубочайшей древности, там ещё в I тысячелетии до Р. Х. существовала высокая культура. В VIII в. арабы завоевали Хорезм и уничтожили эту древнюю культуру.

Об аль-Хорезми известно лишь, что он написал ряд трудов по астрономии и географии. И самое главное, он написал сочинение, которое по-арабски называется «Китаб аль-джебр валь-мукабала». Это сочинение оказало большое влияние на развитие математики в Европе, а само слово «аль-джебр», входившее в название книги, постепенно стало названием науки — алгебра.

На русский язык название трактата знаменитого хорезмийца переводится так: «Книга о восстановлении и противопоставлении». Что означают слова «восстановление» и «противопоставление». Операция переноса некоторого элемента уравнения из одной части в другую с обратным знаком означает, что мы уничтожаем данный элемент в одной части, и восстанавливаем (аль-джебр) его с противоположным знаком в другой части. Это и есть операция восстановления. Операция приведения подобных членов уравнения у аль-Хорезми носила название «валь-мукабала».

В «Китаб аль-джебр валь-мукабала» нет двух очень важных для решения уравнения вещей. Во-первых, аль-Хорезми, наверное, не был знаком с «Арифметикой» Диофанта и поэтому не использовал изобретённых им отрицательных чисел. Во-вторых, он совсем не использовал никаких букв и символов, кроме обозначения цифрами чисел. Алгебра совсем без букв, всё на словах, всё в уме. Такая алгебра — её позднее назвали риторической (от греческого *риторео* — «произношу речь») — требовала большого мастерства и была очень трудной. Совсем трудно стало тогда, когда люди научились решать уравнения не только первой степени и не только с одним неизвестным.

Современный язык алгебры создавался постепенно. Многие величайшие математики приняли в этом участие. Французский математик Франсуа Виет (1540–1603) первым догадался обозначать буквами не только неизвестные, но коэффициенты при них. Это был огромный шаг вперёд. Ведь если не использовать букв для обозначения коэффициентов квадратного уравнения, то записать даже несложную формулу для его решения будет довольно трудно. Именно Виета называют сегодня «отцом алгебры».

3. Что могут весы рассказать об уравнении

(4, 5, 6 классы)

ЗАМЫСЕЛ ИГРЫ

В игре в воскресенской средней школе № 26 мы попытались учесть свой московский опыт и существенно перестроили сценарий игры. Полученную игровую форму мы считаем одной из удачных.

Рассуждали мы так. Поскольку играть будем с учениками 4, 5, 6 классов, не имеющими опыта РО в начальной школе, то необходимо организовать для детей возможность двигаться в трёх слоях, как первоклашки РО делают: оперировать в слое предметном (вещном), в слое модели весов и в слое уравнения (языка алгебры). Значит, для игры нам нужны реальные весы с двумя чашами, грузики и предметы, которые мы будем взвешивать.

Сценарная заготовка учебной ситуации «**Постановка задачи на игру**»

Первый день

Установка руководителя игры

> Приведённые ниже вопросы и ответы намеренно схематичны, они соответствуют лишь логике развёртывания содержания. Такие ответы нужны учителю «по норме». Это означает, что в реальной ситуации вопросы и ответы детей будут иными. Но из всех вопросов и ответов, возникающих в реальном коммуникативном взаимодействии с детьми, нужно выбирать и форсировать именно те, которые позволят реализовать логику развертывания содержания.

На столе в общем зале – весы и разные предметы, которые можно положить на весы.

– Откройте свои тетрадки. Запишите название нашей игры: «Что могут весы рассказать об уравнении». Вам не кажется странным название игры? Что общего между весами и уравнением из математики?

– Как вы думаете, **зачем** *нужны весы? Ведь не для того же, чтобы рассказывать об уравнении!*

– Чтобы можно было сопоставить предметы по весу.

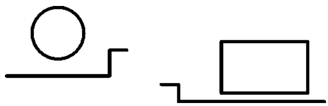
– ***Сопоставьте*** *эти два предмета.*

Кладём на разные чаши весов.

– Что больше весит?

– Кирпичик.

– ***Нарисуйте****, что у вас получилось. Несущественное отбросьте! (Что не существенно для изображения сути?) Существенное положите в рисунок.*



– ***Запишите языком алгебры****, что у вас получилось.*

Обозначим: Вес шарика – Ш

Вес кирпичика – К, тогда Ш < К.

– В своих тетрадочках нарисуйте и запишите все, что у нас на доске изображено.

Задачно-игровая ситуация для детей

Руководитель игры:

Представьте себе, что вы находитесь в плену у злых, но не очень умных разбойников. Вы сидите в прозрачных, но звуконепроницаемых клетках. Можете только рисунки показывать друг другу. Вы знаете про устройство своей тюрьмы: в каждой клетке есть специальный цветной квадратик пола, и если на такой квадратик в каждой клетке пленники сумеют положить предметы *одинакового веса*, то стены клеток упадут, и вы окажетесь на свободе.

Такие предметы в каждой клетке есть – это одинаковые по виду, но разные по весу бутылочки. Надо знаками на плакате передать информацию о весе своих бутылочек так, чтобы каждая группа смогла выбрать для себя одну бутылочку, которая совпадёт по весу с одной из бутылочек в каждой другой группе.

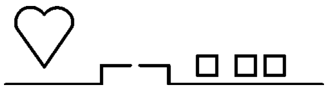
Писать слова нельзя, можно только знаками «разговаривать».

Распределяем детишек по группам (списки групп сделаны заранее, их зачитывает учитель) и группы расходятся по классам со своими учителями.

Расходимся по группам на 30 мин (по разным комнатам). В каждой группе есть весы и разные предметы для взвешивания. Два разных по весу предмета и предметы-мерки (те, что можно использовать в качестве гирек-единичек). Всего в игре восемь предметов (если четыре группы), четыре из них (по одному в каждой группе) равные по весу, но отличающиеся по форме или по размерам, и штук двадцать предметов-гирек (могут быть элементы любого конструктора, например, «Лего». Это удобно, так как гирьки из конструктора можно собирать и разбирать).

Дети должны восстановить постановку задачи и попытаться решить её.

Собираемся все вместе. Решение (общий вид изображения веса для всех предметов в группе):



$A = 3$

Смотрим на плакаты разных групп. Каждая группа смотрит на все плакаты.

– *Покажите предметы, равные по весу. Теперь положите их на свои квадратики (мы приготовили на месте каждой группы цветной квадратик). Ура! Стенки упали! Вы свободны!*

А теперь посмотрим: какие **идеи** помогли каждой группе решить задачу.

– *Какие идеи использованы в каждом решении?*

– Использовать деталь конструктора как мерку.

– Использовать модель весов.

– Использовать алгебраическую запись. И т. д.

– *Молодцы! А теперь – задание группам.*

Задание группам (решение уравнений, требующее деления частей уравнения на равные части и переноса члена уравнения в другую часть с противоположным знаком – операция снятия грузов с обеих чаш).

4 класс,	1 группа:	$2x = 4$	$3x + 1 = 4$
	2 группа:	$3x = 6$	$2x + 2 = 4$
5 и 6 классы,	3 группа:	$2x = 3$	$x + 3 = 2 + 3x$
	4 группа:	$3x = 2$	$2x + 6 = 1 + 4x$

Решите уравнения, действуя последовательно таким образом:

1. Представьте себе ситуацию взвешивания, которая соответствует данному уравнению. Выложите эту ситуацию на реальных весах. Покажите, что надо делать, чтобы узнать: сколько весит один неизвестный предмет.

2. Покажите шаги решения на картинках с изображением весов, то есть на модели.
3. Каждой картинке поставьте в соответствие алгебраическую запись.
4. Занесите на ватман решение на модели весов и в алгебраической форме, причем в двух параллельных столбиках.

Общее заседание

Вывешиваются все четыре ватмана. Все ходят и смотрят. У каждого ватмана один-два человека отвечают на вопросы. Эта форма работы называется «стендовые доклады» *(15 мин).*

После этого садимся, слушаем доклады и обсуждаем их.

Отвечаем на вопросы:

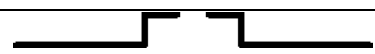
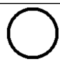
1) Как решаются на весах уравнения вида $ax = b$ и какая алгебраическая операция этому соответствует?
2) Как на весах решается уравнение, где неизвестные и известные находятся по обе стороны равенства? И какое алгебраическое правило этому соответствует?

Домашнее задание

Дано уравнение $2x + 1 = -3$. *Как изобразить отрицательное число на весах? Решить уравнение на модели весов.*

На рефлексии с педагогами систематизировать полученные результаты в две таблицы. Два ватмана с таблицами:

1. Элементы моделей

Элементы модели	*Знак элемента*	*Элементы уравнения*
Единичный грузик, единица		1
Взаимное расположение чаш		=
Неизвестная величина – некий груз		x
Отрицательная единица – воздушный шарик		–1

2. Операции с элементами моделей (алгебраическая модель и модель весов)

Операции с элементами на весах	*Знак операции*	*Алгебраический аналог операции*
Убрать с чаши весов некий груз		Вычесть величину из одной части уравнения
Поделить на равные части наполнение чаш		Разделить обе части уравнения на одно и тоже число
Доложить на чашу некий груз	Знак докладываемого элемента	Прибавить величину к одной части уравнения

Второй день

Самостоятельная работа

4, 5 классы – уравнения;

6 класс – уравнение на деление не нацело, система уравнений

$$\begin{cases} 3x = 2 \\ x + 2 = 1 + 3x \\ 3x + 2 = 2x + 4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \\ 3x = 1 \end{cases}.$$

Установка на второй день (после самостоятельной работы).

Общий вопрос для всей аудитории про уравнение с отрицательным элементом. (Разыграть)

$$2x + 1 = -3$$

Задания в группы: решить **уравнения** (с отрицательным коэффициентом, с делением на равное число частей) и систему уравнений и заполнить таблицы. 6-му классу – с отрицательным неизвестным.

4 класс, группа 1:

1. $4x - 3 = -5$.
2. Придумать уравнения, на которых можно показать «работу» алгебраического правила: *Если к обеим частям уравнения добавить (отнять) одно и то же число, равенство не изменится.*

4 класс, группа 2:

1. $4x - 3 = 5$.
2. Придумать уравнения, на которых можно показать «работу» алгебраического правила: *Если обе части уравнения увеличить (уменьшить) в одинаковое число раз, то равенство не изменится.*

5, 6 классы, группа 3:

1. Написать, как обосновывается с помощью модели весов алгебраическое правило переноса величины в другую часть уравнения со сменой знака.
2. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

5, 6 классы, группа 4:

1. Показать на модели ход решения задачи: Ира и Таня покупали в магазине карандаши и ручки. Ира купила 6 ручек и 4 карандаша. Таня купила 5 ручек и пять карандашей. Каждый карандаш стоил 15 рублей. У Иры денег на покупку не хватило, ей пришлось занять у Тани 30 руб. Сколько у девочек было денег первоначально, если в результате каждая из них потратила одинаковую сумму?
2. $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Домашнее задание

Показать на модели решение задачи: «Библиотекарь Тося купила два двухтомника Пушкина и четыре трёхтомника Лермонтова, а библиотекарь Фрося – три двухтомника Пушкина и три трёхтомника Лермонтова. Цена трёхтомника 200 руб., и известно, что Тося и Фрося истратили равное количество денег. Сколько заплатила каждая из них?»

Третий день

Рефлексия и систематизация полученных знаний.

Дать форму систематизации знаний.

РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАМЫСЛА

1. Реальный хронотоп игры

В реальности работа в группах, на общем заседании и дома выстроилась с небольшими *отклонениями от замысла.* Восстановим ход игры, как это все происходило в реальности.

Первый день

- Демонстрация работы весов, появление на доске картинки с изображением ситуации соизмерения предметов по весу и алгебраической записи результата.
- Задачно-игровая ситуация «Освобождение из плена».
- Установка на работу в группах. Работа по группам. Пять групп по два уравнения в каждой группе.
- Общее обсуждение решений всех групп, представленных на ватмане. (Я ввела таблицу соотношения языка весов и языка алгебры, и мы стали договариваться о единстве обозначений для всех. Появился значок «деления целого на равные части»!) Докладов от групп как таковых нет.
- Домашнее задание: придумать знак для отрицательного числа и решить уравнение с отрицательным числом на модели весов.
- Рефлексия с педагогами-игротехниками. Рефлексия введения значка «деление на равные части». Решение с ними уравнения с отрицательным числом. Освоение языка весов. Изготовление «вечной» таблицы на ватмане со свободным местом для дальнейшей разработки языка весов.

Второй день.

- Самостоятельная работа детей, в которую вошли уравнения первого дня (20 мин). Разбор по группам с учителями уравнения типа $3x = 2$ на весах, освоение значка «деление целого на равные части» (40 мин).
- Общее обсуждение. Изобретение значка для отрицательного числа, решение домашнего задания коллективно (30 мин.). Задание для работы в группах: уравнение с отрицательным числом (одно на всех) и текстовая задача про ручки и карандаши (тоже одна на всех).
- Работа по группам.
- Общее обсуждение. Коллективный разбор решения уравнения и задачи. Все доклады одновременно висят на стенах. Докладов устных от групп как таковых нет.
- Домашнее задание: решить на весах систему уравнений. (Алёна решила сразу и рассказала нам, когда школьники разошлись.)
- Рефлексия с игротехниками. Решение системы уравнений. Разбор решения задачи. Обсуждение завтрашнего дня как заключительного и рефлексивного, требований к докладу от группы.

Третий день.

- Общее обсуждение. Разбор трёх предложенных способов решения системы уравнений.
- Установка на подготовку к заключительному рефлексивному докладу: что научились делать, что узнали нового, что поняли про себя и про учение, как можно собрать и систематизировать полученное.
- Работа по группам.
- Выступление групп с докладами. Отношения и дополнения к докладам. Общее рефлексивное обсуждение.

Отсюда видно, что мы отказались от исследования правил преобразования уравнений, но взяли текстовую задачу. Вроде бы это стало оптимальным вариантом постепенного усложнения заданий для данного возраста (4, 5, 6 класс). Попробуем теперь разобраться, что реально произошло в эти три дня.

2. Что такое *передача средства* для решения класса задач

Все наши образовательные игры проектируются с целью передачи средств той или иной деятельности, инструментов для решения предметных задач. Но далеко не всегда в игре получается передать детям эти средства. Чаще производится демонстрация использования инструмента. Руководитель игры демонстрирует применение средства в расчёте на то, что потом, за пределами игры, педагоги школы, освоив инструмент сами, будут помогать детям использовать его в образовательном процессе. Но организовать ситуацию так, чтобы дети увидели, взяли и стали тут же в игре свободно использовать инструмент для решения разнообразных задач, очень и очень не просто.

В данной игре как раз получилось сыграть в передачу средства решения и исследования уравнений, систем уравнений с двумя неизвестными и текстовых задач. Ученики пятого класса сами изобрели способ (даже несколько) решения системы уравнений. А ведь они даже значок системы видели впервые! Именно поэтому очень важно отрефлектировать особенность этой игры, попытаться выделить ***норму*** работы по передаче средства решения класса задач.

Почему мы с уверенностью можем говорить о том, что передача средства состоялась? Во-первых, дети начали играть с моделью, придумывая и используя значки элементов и операций для игровых проб, не страшась того, что им никто не объяснял, как надо двигаться к решению. Уже во второй день они с увлечением, весело искали пути решения уравнений на весах. Во-вторых, школьники могли обсуждать решения друг друга, критиковать, дополнять, предлагать ходы. И, в-третьих, дети осознали значимость ситуации, поняли, что приобрели некую силу. Это было понятно по рефлексивным докладам и их обсуждению в третий день. Они рефлектировали с удовольствием, обнаруживая действительно сущностные моменты своего проживания этой игры.

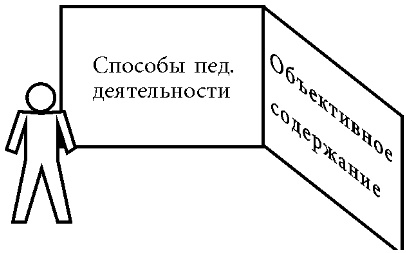
При всем этом мы отлично понимаем, что только несколько человек из всего игрового коллектива самостоятельно изобретали способы решения все усложняющихся задач. Бóльшая часть детишек научалась при коллективном обсуждении и разборе этих решений. То есть они получали знание в готовом виде и только осваивали его. Вроде бы так же все происходит и в обычном уроке: учитель рассказывает, как надо, дети пробуют повторить.

Однако так, да не так. Ведь на уроке незыблемо распределение ролей: учитель знает, а ученик учится у него. Ни один ребёнок не претендует на место знающего – так не бывает. А в нашей игре так есть, знание порождают твои товарищи, такие же, как ты, школьники. Значит и ты, в принципе (если постараешься), можешь это сделать! Надо только хорошенько подумать и «не бояться своих мыслей»[1]. Установка сознания в игре совсем другая, чем на традиционном уроке. Именно на традиционном. Потому что и урок можно «скроить» на манер игры. Это станет возможным, если педагог решится осваивать новые способы педагогической деятельности, осваивать мыследеятельностную педагогику.

Справедливости ради надо признать, что и в игре осталась часть детей, которые не включились вообще. Это не просто неактивные дети (можно ведь внешне никак не проявляться, но размышлять и действовать в уме и в своей тетрадочке), речь не о них. Есть категория детей, которые совсем не верят в себя, не верят, что у них может хоть что-то получиться. Они даже попыток не делают. Привыкли за свою школьную жизнь к такой роли. Это педагогический брак. Надо в этом себе признаваться. Дети, которым страшно в школе, скучно и тоскливо, это дети, которых мы, педагоги не смогли увлечь, заразить своим интересом. Мы не смогли обнаружить их сильную сторону, опереться на нее, а ведь такая сила есть, непременно есть в каждом человеке.

Чем отличается педагогическая деятельность МД-педагога от работы учителя в традиционном подходе? В любой педагогической деятельности можно выделить две плоскости работы. Эти плоскости ортогональны, то есть не имеют взаимных наложений. Одна из них – плоскость **содержания**, передаваемого детям. Вторая – плоскость собственно **форм взаимодействия с детьми**, основная плоскость педагогической деятельности.

Каждый учитель должен уметь видеть и анализировать свою деятельность на этих ортогональных плоскостях. (Есть ещё третий план – план диагностики состояния сознания каждого ребёнка: что ребёнок видит и понимает по-другому, чем учитель.)



[1] «В игре мы научились не бояться своих мыслей» – цитата из заключительного доклада в третий день игры.

В нашей игре на плоскости объективного содержания располагается логика введения и усложнения модели весов как средства решения и исследования уравнений. И то, что это содержание отличается от того, как оно организовано в школьной программе, было очевидно всем педагогам, участвующим в игре. Содержание отличалось видимым образом – картинки весов, знаки элементов и операций на весах.

А вот плоскость способов педагогической деятельности специально на игре не обсуждалась, способы работы просто развёртывались в исполнении руководителя игры в его взаимодействии с детьми. Именно поэтому очень важен вопрос о том, что же руководитель игры, он же МД-педагог, делает иного, чем педагоги в игровых группах и обычно на уроках?

Действительно, вроде бы новое содержание можно передать детям и вполне обычным образом. Педагог расскажет «новый материал» – даст картинку весов, таблицу с элементами и операциями на модели весов и покажет, как решать с помощью весов уравнения. Потом даст задание, и дети будут его выполнять. Но вот ведь в чем вопрос: будет ли им «так интересно решать эти скучные уравнения»?[1]

Действительно, интересность заложена собственно в содержании, передаваемом детям? Или не менее важна и сама форма взаимодействия учителя и ученика?

Так вот, форма не просто важна, она принципиально важна. МД-педагог не передает знания, **он строит ситуацию (ситуацию учения-обучения), в которой ребёнок сам творит знание, которое выступает средством разрешения данной ситуации.** Это ситуация, где актуализация мышления происходит с неизбежностью.

3. Про единство формы и содержания

Готовясь к занятиям, МД-педагог не просто подбирает задания и упражнения, он сценирует деятельностную ситуацию так, чтобы дети вынуждены были в ней действовать, испытывать затруднения, и выходить из затруднения с помощью своего изобретения-средства. Педагог понуждает детей к творчеству, причём в строго заданном направлении. Дети должны открыть нечто сами, но открыть именно то, что запланировал учитель (по сути, в деталях детское открытие, как правило, отличается от того,

[1] Цитата из рефлексии третьего дня игры.

как его в своем проекте замыслил учитель). Это звучит парадоксально. Это есть основная проблема, основная тайна и основной козырь МД-педагогики.

Посмотрим, как это всё осуществлялось в нашей игре. Будем отмечать значком **Со** те строчки, где говорится о логике развертывания учебного содержания, и значком **Фо** – те строчки, где говорится о форме взаимодействия ученика и учителя.

Со. Что в нашем замысле оказалось точным и действенным. *Работа в трёх слоях: 1) в слое предметных действий с реальными весами, 2) в слое оперирования на модели весов, 3) в слое языка алгебры.*

Фо. Предметные действия с весами были упакованы в игровую ситуацию-задачу. Для освобождения из плена команды должны были:

- проанализировать ситуацию, в которую они попали;
- понять, что необходимо сделать в каждой группе и, соответственно, в своей собственной группе; произвести взвешивание; для этого как-то самостоятельно соорганизоваться;
- понять, что могут сделать не так в других группах, понять, как это можно учесть;
- оформить результаты своей работы на ватмане так, чтобы все остальные смогли увидеть нужную для своего выбора информацию;
- прочитать чужие сообщения и сделать правильный выбор самим – определить бутылочку, которая совпадет по весу с четырьмя другими бутылочками из всех других групп.

Сложная ситуация реального действия. Сложная – для детей, но не для педагогов. И здесь дети должны были действовать самостоятельно. Помощь педагогов должна была быть очень дозированной: вопросы, сомнения... Здесь важны не только самостоятельные действия детей с грузиками, гирьками и весами, но и размышления по поводу своих действий: ведут ли они к разрешению ситуации-задачи. То есть дети должны были **самостоятельно поставить учебную задачу для себя.** Это важнейший момент деятельностной педагогики. Задача педагога здесь – не допустить хаотических действий детей, не пропустить их к взвешиванию без этапа постановки учебной задачи. Так и действовали бы педагоги системы развивающего обучения Д. Б. Эльконина-В. В. Давыдова. Но в нашей игре учителя поступили так, как привыкли делать на уроках – все объяснили детям, восстановили для них ситуацию (конечно, так как сами её поняли) и сказали, что нужно делать.

Ситуация неопределённости для школьников сохранялась только там, где учитель сам не очень понимал, как действовать.

По-другому, правда, и быть не могло, так как возможности проинструктировать педагогов до начала игры не было. Они включились в работу на этапе установочного доклада вместе со школьниками. И смогли узнать о требованиях к работе игротехников в группе только на рефлексии после первого игрового дня.

Да и инструкции одной тут маловато. Чтобы освоить деятельностную педагогику, надо пройти много подобных игр, сопровождая свою работу тщательной рефлексией своей деятельности в игре, как в группе, так и на пленарном заседании.

Со. Однако задачная ситуация свою функцию в игре выполнила. Школьники поработали с весами, поняли, как движутся чаши под действием груза, что требуется для уравновешивания чаш. Получили опыт изображения самих весов и конкретных ситуаций уравновешивания на бумаге (на мыслительной плоскости). Поняли, как алгебраическая запись соответствует положению грузов на весах. Таким образом, в начале игры были освоены все три слоя оперирования, необходимые в этой игре. Это **слой предметных действий, слой моделирования уравновешивания на схеме весов и слой алгебраического языка уравнений.**

Слой оперирования с реальными весами кроме понимания механизма взвешивания дал ещё один мощный незапланированный эффект. Дети испытали большие трудности, подбирая гирьки и пытаясь добиться равновесия на лабораторных весах. А когда они стали дублировать свои действия на модели весов в мышлении, то быстро сообразили, что на идеальных весах работать несопоставимо легче, чем на реальных. Идеальные весы и слушаются идеально. В мысли всё точно, в реальности приблизительно. В мысли целое можно поделить на любое нужное нам число равных частей, в реальности сделать это абсолютно точно нельзя. В мысли можно даже воздушный шарик поделить на равные части, реальный шарик при такой процедуре сразу лопнет.

Фо. Таким образом, различение **идеального** и **реального** дети усвоили через сопоставление своего собственного опыта оперирования с вещами и оперирования с идеями, идеальными сущностями.

Со. Переходы от модели весов к алгебре и обратно закрепили для детей за абстрактными алгебраическими значками их физический смысл, который всегда можно было отнести к собственному «ручному» опыту работы с весами из кабинета химии.

Эти переходы для детей существовали не только в их мыслительном оперировании. Переходы были закреплены, оформлены в виде **таблицы**. Сопоставительной таблицы языков алгебры и весов. Форма таблицы была предложена руководителем игры в первый день, и в дальнейшем уточнялась и заполнялась игроками на протяжении всей работы. Таблица визуализировала, сделала зримыми сложные мыслительные передвижения по слоям мыслимого оперирования. Кроме того, таблица позволяла принимать конвенциональные решения, договариваться о единообразных значках.

В замысле мы заготовили две таблицы: таблица элементов и таблица операций, но в игре оказалась более удобно свести их в одну:

Язык весов		*Язык алгебры*	
Действия и элементы	*Знаки*	*Действия и элементы*	*Знаки*

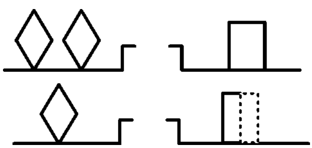
В первый день мы решали уравнения типа $3x = 2$, в которых даже старшеклассники делают ошибки. Школьники делят «как проще» – большее на меньшее.

Фо. Чтобы разобрать этот случай, мы заготовили сборные-разборные грузики для взвешивания предметов. Предметами выступили палочки сладкой соломки. Грузиками – сборные элементы из конструктора «Лего». Задание требовало выложить уравнение на весах реальных, решить его на весах. А затем засхематизировать решение на модели весов.

Со. Таким образом, три палочки соломки неизвестного веса дети уравнивали двумя грузиками собранными из лего. Чтобы найти вес одной палочки соломки, пришлось два грузика разделить на три части (для этого сначала каждый грузик разобрать на три элементика). Ответ 2/3 получался натурально – по одной третьей части от каждого грузика.

Следующий вопрос: как эти операции изобразить на модели весов. Этот вопрос мы уже решали на общем заседании.

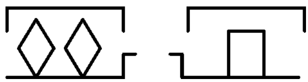
Фо. Идея Галины Васильевны: доклады делать молча! Только рисунок, никаких вспомогательных слов. Это правило оказалось очень эффективным. Так, на детских рисунках были пропущены ключевые операции.



$2x = 1$

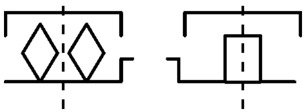
Ответ верный, но без слов по рисунку не получается объяснить, почему один x равняется половинке грузика.

Со. В результате коллективных усилий удалось зарисовать две недостающие операции. Первая операция – объединение в единое целое всего совокупного веса на одной чаше и на другой чаше. Это единые равные, так как чаши уравновешены.



Мы как бы помещаем в одинаковые коробочки все содержимое правой чаши и левой чаши.

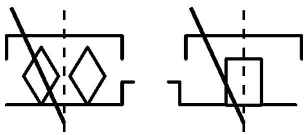
Далее. Чтобы найти, сколько весит одно неизвестное, нам надо узнать, сколько весит половина целого левой чаши, так как неизвестных два (надо делить пополам).



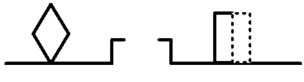
Но если мы разделим пополам целое левой чаши и одну половину уберём с весов, то для сохранения равновесия нам надо и целое правой чаши поделить пополам и убрать одну половину. Если целые равны по весу, то и их половины равны по весу.

Делим пополам целые обеих чаш.

Удаляем половинки с обеих чаш.



Получаем ответ, который изображен на рисунке:



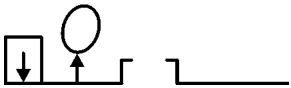
Эта последовательность операций, –

1) выделение целого на двух чашах,
2) деление целого на равные части,
3) удаление равных частей с обеих чаш, –

оказалась очень понятной для детей. Они с удовольствием в дальнейшем применяли эту процедуру для решения уравнений. Она была кристально ясной и не позволяла ошибаться.

Был единственный спорный момент: как правильно делить целое – по вертикали или по горизонтали? Но разные примеры показали, что способ деления можно избирать любой, брать тот, что удобнее изображать в данном конкретном случае. А делить можно на любое количество частей: и на две, и на три, и на десять, и т. д.

Изобретение *отрицательной единички* как весовой мерки для отрицательной величины детишки осуществили гораздо быстрее и легче, чем педагоги сделали это накануне во время рефлексии. Но и легче, чем другие школьники в подобных играх. Видимо, это тоже надо отнести на счет «действий с предметами» – работы с настоящими весами. И название для этой единички дали хорошее – *противовес.* И то, что на весах расположение на чаше одновременно веса (единичного грузика) и противовеса даст нулевой результат, тоже прошли с пониманием и весело.



В группах все решали одну и ту же текстовую задачу. Это было разумно – дать одну задачу для всех, так как обсуждение результатов опять было можно организовать «без слов». Текст задачи был всем знаком, и можно было смотреть на схемы и задавать вопросы и критику строить. Все группы использовали схему весов. Оказалось, что схема весов позволяет схватить смысл задачи в целом, это детям очень понравилось. Причем никакой трудности при переходе от весовых величин к стоимостным дети не испытали. Для них естественно было, что и стоимости можно уравновешивать на идеальных весах так же, как и весовые характеристики. Это тоже был новый эффект в игре данного типа.

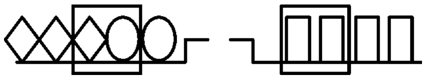
При таком ходе игры отпали сомнения: давать или нет систему уравнений. Более того, систему мы дали как домашнее задание, а пятиклассница Алёна решила её тут же в зале и потребовала выслушать её решение.

На следующий день (а это был заключительный день игры) у нас оказалось три разных способа решения системы уравнений

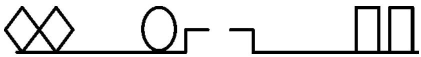
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

Все они были вариациями метода подстановки. Приведём один из них.

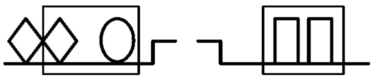
Изображаем первое уравнение. И выделяем на тех же весах квадратиками второе уравнение: $x + y = 2$.



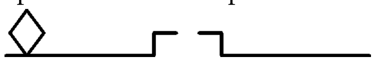
Теперь можно убрать с чаш то, что выделено, т. к. равновесие сохранится. Получим:



Теперь ещё раз увидим и выделим второе уравнение на весах:



И ещё раз уберём с обеих чаш равные веса. Останется



$x = 0$.

Тогда $y = 2$.
Решили!

В ходе решения систем уравнений и при обсуждении решений обнаружился интересный феномен: дети приняли модель весов как конструктор-игрушку и принялись бесстрашно экспериментировать с возможностями этого конструктора. Им было просто интересно изобретать решения в этом конструктивном языке, который они же сами и порождали по мере новых потребностей. Таблица отношения языков выступала в роли правил игры.

> Практически все образовательные игры имеют целью передачу тех или иных средств учебной деятельности. Но далеко не всегда удается сложить такую ситуацию, что средство начинает активно использоваться школьниками уже в самой игре. Обычно приходится удовольствоваться деятельностным образцом применения средства для решения задачи. Присвоение средства планируется за рамками игры в работе на уроках. Но в этот раз было иначе. Модель весов уже в самой игре была активно используема детьми для решения незнакомых ранее задач. Игровой момент был здесь очевидно очень важен.
>
> Не угадывание правильного хода, которого ждёт учитель (как это бывает обычно), а личное творчество в столкновении с новыми задачами. Творчество – потому что действуешь, хотя и не знаешь, как надо, как правильно действовать. Просто пробуешь, пробуешь и выходишь к решению. А средство резко расширяет возможности действия, эффективности его, раздвигает границы.

Этот фрагмент работы был последним в процессе усложнения алгебраических заданий. Завершением игры должна была стать рефлексия освоенного способа работы. Эмоциональный фон был очень насыщенный, событий и переживаний в ходе игры школьники получили в избытке. А это значит, что мы имеем все основания для качественной рефлексии.

Короткая установка на подготовку сборочного заключительного доклада – и группы уходят готовить свои сообщения.

Рефлексия действительно получилась. Детям было самим интересно разобраться в сути того, что они прожили в игре. Рефлексивные доклады то и дело перерастали в бурные обсуждения и подробные дополнения. Всем хотелось высказать свое, личное (см. Приложение 4 на с.191).

Игра получилась.

За счёт чего же, собственно, получилось передать средство решения алгебраических задач? Что отличало эту игру?

Характеристики игры в передачу средства решения задачи

1. Не смешивались задачи: задача порождения (изобретения) средства и задача освоения средства. Мы осваивали модель весов как средство. Хотя изобретение знаков для элементов и операций имело место, но главные идеи (идея весов и принцип оперирования с весами) были просто предложены детям как готовые.
2. Оперирование в идеальной действительности модели было предварено оперированием с реальными предметами. Этот опыт предметных действий стал базой, основой для мыслительного действия.
3. Задания были выстроены по усложнению. Каждый переход к более сложному заданию требовал только одного конструктивного изобретения и опирался на предыдущие освоенные ступеньки.
4. В таблице осуществлялась поэтапная сборка результатов. Все аспекты изобретения были визуализированы и оформлены в целое в таблице. Таблица же задавала и логику продолжения конструирования языка модели.
5. Таблица плюс успешный опыт решения первых заданий плюс опыт предметных действий обеспечили возможность самостоятельного пробующего действия с игровым отношением к новым, более сложным задачам.

Приложение 1. Пример программы игры

Программа учебной игры с учениками 4, 5, 6 классов.
«Что могут весы рассказать об уравнении»

День 1. 2.XII.2005, пятница. **«Весы: инструмент и идея. Язык модели весов. Чем могут помочь весы в решении уравнений?»**

9.00 – 10.00. Распределение участников по группам. Установка на игру (внутри установки 30 мин работа по группам).
10.10 – 11.30. Работа в группах: 1) собрать полученные знания; 2) выполнить задание на весах реальных, на модели весов, с помощью уравнения; 3) что открыли для себя; какие условные обозначения вы ввели на модели весов, чему каждый знак соответствует в алгебраическом языке; 4) подготовить доклад на ватмане.
10.30 – 10.45. *Завтрак.*
11.30 – 14.00. Стендовые доклады (15 мин.) Доклады групп и обсуждение по теме дня.
13.30 – 13.50. *Обед.*
14.30 – Рефлексия игрового дня для игротехников.

День 2. 3.XII.2005, суббота. **«Продолжаем изобретение языка модели весов: новые элементы и операции с ними»**

9.00 – 9.20. Самостоятельная работа в группах.
9.30 – 10.00. Установка для участников на второй день игры.
10.00 – 11.35. Работа в группе. Рефлексия предыдущего дня и установки второго дня. Решение уравнения. Прорисовка модели весов по результатам обсуждения всех групп: идея, знаки, операции. Критика варианта и изобретение новых знаков и операций.
10.30 – 10.45. *Завтрак.*
11.40 – 14.30. Доклады групп и общее обсуждение по теме дня.
13.30 – 13.50. *Обед.*
Домашнее задание.
14.30 – Рефлексия игрового дня для игротехников.

День 3. 4.XII.2005, воскресенье. **«Зачем нужна модель весов. Что мы поняли про моделирование и язык модели уравнения»**

9.00 – 9.15. Установка для участников.
9.15 – 10.50. Работа в группах по теме дня. Восстановить всё, что делали на игре. Что осталось непонятным? Подготовка доклада и оформление необходимых материалов.
10.30 – 10.45. *Завтрак.*
11.00 – 12.10. Доклады групп и общее обсуждение по теме дня.
12.10 – 13.00. Общая рефлексия и подведение итогов учебной игры. Рефлексия в форме замысла индивидуальных работ.

Приложение 2

Задачи и задания для игры

1. Показать на модели ход решения уравнения:

$2x = 4$, $3x = 6$, $2x = 3$, $3x = 2$,
$3x + 1 = 4$, $2x + 2 = 4$, $x + 3 = 2 + 3x$, $2x + 6 = 1 + 4x$.

2. Как на весах изобразить такое уравнение:

$2x + 1 = -3$, $4x - 3 = -5$, $4x - 3 = 5$.

3. Показать на модели ход решения задачи.

1. На базу привезли 79 т фруктов. Груш привезли на 1 т больше чем яблок, яблок в 3 раза меньше, чем бананов, а бананов — в 2 раза больше, чем апельсинов. Сколько апельсинов привезли на базу?
   Правильно оформить решение: краткая запись, схема модели, расчёты, ответ.
2. Ира и Таня покупали в магазине карандаши и ручки. Ира купила 6 ручек и 4 карандаша. Таня купила 5 ручек и пять карандашей. Каждый карандаш стоил 15 рублей. У Иры денег на покупку не хватило, ей пришлось занять у Тани 30 руб. Сколько у девочек было денег первоначально, если в результате каждая из них потратила одинаковую сумму.
3. Библиотекарь Тося купила два двухтомника Пушкина и четыре трёхтомника Лермонтова, а библиотекарь Фрося – три двухтомника Пушкина и три трёхтомника Лермонтова. Цена трёхтомника 200 руб., и известно, что Тося и Фрося истратили равное количество денег. Сколько заплатила каждая из них?
4. В одном ящике было по весу в 2 раза больше груш, чем в другом, а в третьем — на 5 кг груш меньше, чем в первом. Сколько по весу было груш в каждом ящике, если все груши весили 125 кг?

4. Решить систему уравнений используя модель весов:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}.$$

5. Придумать уравнения, на которых можно было бы показать «работу» алгебраических правил:

1. Если к обеим частям уравнения добавить (от частей отнять) одно и то же число, равенство не изменится.
2. Если обе части уравнения увеличить (уменьшить) в одинаковое число раз, то равенство не изменится.

Объяснить работу этих правил, нарисовав действия с «весами», соответствующие преобразованиям уравнения.

6. Написать, как обосновывается с помощью модели весов алгебраическое правило переноса величины в другую часть уравнения со сменой знака.

7. Построить модель, объясняющую поведение свечи, укреплённой посередине на иголках и зажжённой с двух концов.

Приложение 3

Материально-техническое обеспечение игры

- Ватман (15 листов).
- Маркеры. На каждую группу три цвета.
- Всем участникам программки игры.
- Тексты задач в количестве, достаточном для каждой группы.
- Списки групп и игротехников в группах.
- Общая тетрадь для сессий у каждого ученика.
- Весы, гирьки, предметы для взвешивания.
- Диктофон.

Приложение 4

Детские рефлексивные суждения по окончании игры

- Научились объяснять знаками и рисунками, делать то, что никогда не делали на уроках.
- Скучные уравнения по математике научились рисовать, и стало интересно.
- Так задачу ни за что не поймёшь, а если нарисовать на модели, то всё сразу становится понятно.
- Мы научились превращать скучные вещи в интересные модели и решать задачи.
- Научились не бояться своих мыслей.
- Мы получили инструмент, с помощью которого можно делать работу.
- Мы сделали многое за малое время, придумали свои знаки, научились заменять незнакомые части понятными, ввели пары предметов, научились делить целое вдоль и поперёк.
- Научились мысленно делать всё что хотим, в голове измерять на весах, делить коробочку на нужные части.
- Мы научились рисовать отрицательное число, показывать ноль с помощью противовеса.
- Мы поняли, что в мысли полшарика могут уравновесить полгрузика.
- На уроке нам учитель объясняет, а потом мы решаем, а здесь в первый день ничего не объясняли, и было страшно, поэтому некоторые не пришли, а во второй день мы придумали, как решить, стало интересно.